اسألني عن الهندسة 2016

ملخص

calculus 3

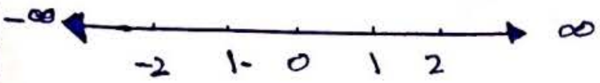
إعداد:
مهيب الزبيدي

Civilium
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

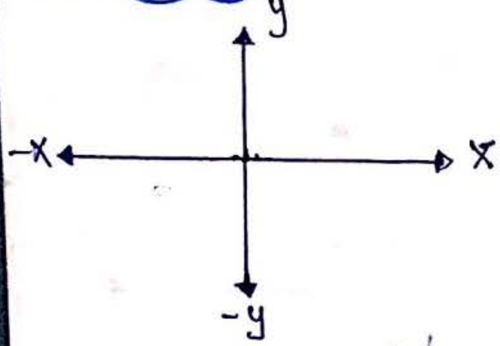
ch 12 : Vectors & the geometry of space :-

12.1 The dimensional space :-

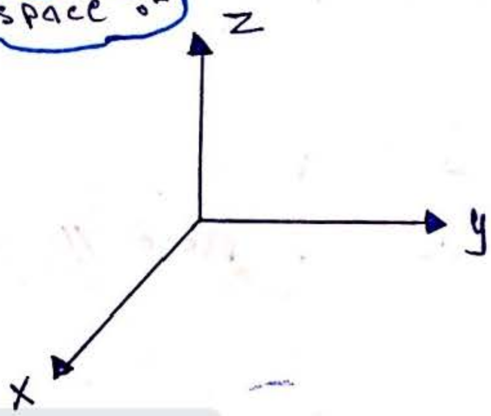
1- space :-



2-space :-



3 - space :-



3 - space consists of :-

1. Three cordinate axis :- x - axis , y - axis , z - axis

2. Three cordinate plane :- حفظ

- x - y plane $\longrightarrow$ Eqn $z = 0$
- x - z plane $\longrightarrow$ Eqn $y = 0$
- y - z plane $\longrightarrow$ Eqn $x = 0$

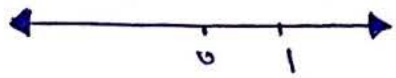
$\longrightarrow$ $z = c$, plane // x - y plane , $c \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ $y = c$, plane // x - z plane , $c \in \mathbb{R}$ — constant :- c رقم

$\longrightarrow$ $x = c$, plane // y - z plane , $c \in \mathbb{R}$

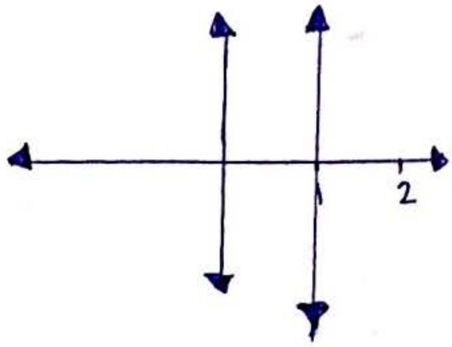
Example : Identiryfy :- the equetion of $x=1$

i) 1- space :-



$x = 1 \longrightarrow$ تمثل point

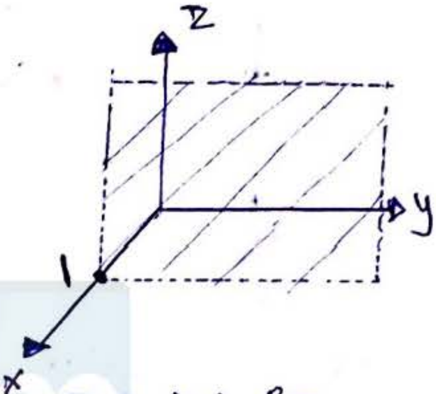
ii) 2- space :-



$x=1 \longrightarrow$ تمثل Line

iii) 3-space

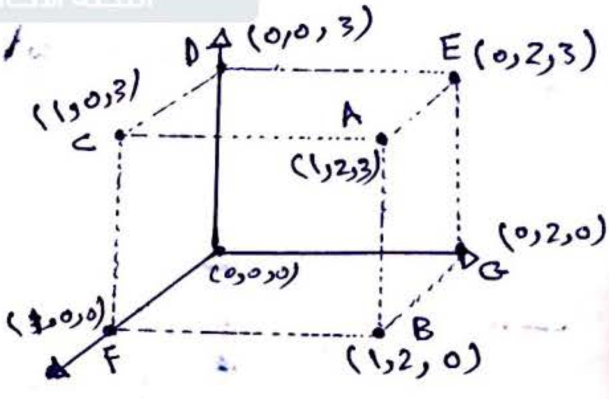
$x = 1 \longrightarrow$ plane يوازي // y-z plane



Example :- Determent all coordinate for every point :-

A (1, 2, 3)

Find plane :-



1 plane C A B $\longrightarrow$ plane // y- z plane

$\boxed{x = 1}$ $\longrightarrow$ * المشترك بين * النقاط

2 plane B A E $\longrightarrow$ plane // x - z plane

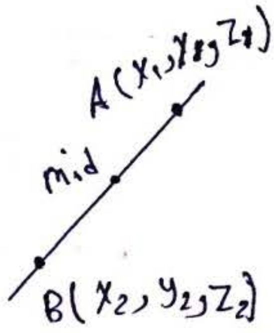
$\boxed{y = 2}$

3 plane A C D $\longrightarrow$ plane // x - y plane

$\boxed{z = 3}$

* Distance between 2-Point :

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$ حفظ مهم



* coordinate of mid point :

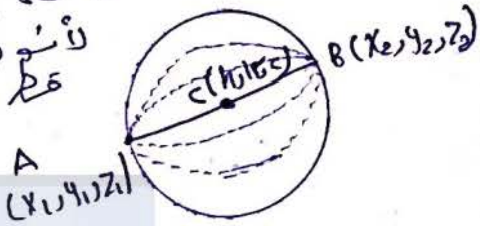
$$Mid\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$ حفظ مهم

* جدول المقارنات للبسيوني عشان الأستاذ الجديد راح نتعلم وحدة كيف نجيب معادلة sphere.

* sphere :-   * من الرحمة *

* $d(C,B)$ or $d(A,C)$ or $\frac{d(A,B)}{2}$ → * على 2 لأنو بتمثل قطر *

من حدودنا بجيب نصف قطر الكرة



* $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ → * عشان * أطلع مركز الكرة

* Eqn of the sphere :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-c)^2 = r^2$$ → * دائماً معاملات (x, y, z) لازم تكون متساوية وتساوي $\boxed{1}$

* center (h, k, c) → مركز الكرة
* radius $= r$ → نصف قطرها
* Note :- * عشان أوجد معادلة الكرة بلزمني دائماً * نصف قطرها ومركزها *

* **Example**: Writ an eqn of the sphere with the $A(-1,2,3)$ & $B(-3,0,1)$ an end point of one of at diameter

فكرة الحل

• بدي أوجد معادلة sphere هون معطيني قطر ماي الكرة،

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{12}}{2} \rightarrow \boxed{rad = \sqrt{3}}$$

$$M\left(\frac{-3+-1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \longrightarrow c(-2,1,2) \longrightarrow$$ * مركز الكرة

معادلة الكرة: $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$

• لنفس السؤال بدي أوجد نقطة على الكرة

• Find apoint on the sphere ? $\longrightarrow$

بعوض رقمين بحيث أني أصفر اثنين من المتغيرات،

فرض $\boxed{x=-2}$, $\boxed{y=1}$ $\rightarrow$ بعوض في المعادلة

$$(\underbrace{-2+2}_{0})^2 + (\underbrace{1-1}_{0})^2 + (z-2)^2 = 3$$

$$(z-2)^2 = 3$$

$$\sqrt{(z-2)^2} = \sqrt{3} \longrightarrow z-2 = \pm\sqrt{3} \rightarrow z = \pm\sqrt{3} + 2$$

نقطتين $\leftarrow$ $z_1 = 2+\sqrt{3}$, $z_2 = 2-\sqrt{3}$

$P_1(-2, 1, 2+\sqrt{3})$

$P_2(-2, 1, 2-\sqrt{3})$

Ex: Find equation of sphere passes through $(4, 3, -1)$ & $C(3, 8, 1)$?

له نقطة بتمر فيها الكرة

* فكرة الحل بدي أوجد معادلة sphere معطيني هو مركزها و أنها بتمر بالنقطة $(4, 3, -1)$

مركزها

المعادلة $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = r^2$

النقطة تحقق المعادلة $(4-3)^2 + (3-8)^2 + (-1-1)^2 = r^2$

$(1)^2 + (-5)^2 + (-2)^2 = r^2$

$r^2 = 30 \rightarrow r = \pm\sqrt{30}$

$r = +\sqrt{30} \rightarrow$ لأنها تمثل مسافة

Eqn of sphere: $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 30$ #

Example: Find equation of the sphere with center $(2, -3, 6)$ that toch:

■ x-y plane ■ y-z plane ■ x-z plane

Solution:

• فكرة الحل بدي أكتبلو معادلة الكرة بحيث انها بتمس المحاور التالية.

$\boxed{1}$ x-y plane $\xrightarrow{\text{يعني}}$ $z = 6 \rightarrow rad = 6$ نصف القطر

$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$

$\boxed{2}$ y-z plane $\xrightarrow{\text{يعني}}$ $x = 2 \rightarrow rad = 2$

$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$

$\boxed{3}$ x-z plane $\xrightarrow{\text{يعني}}$ $y = -3 \rightarrow rad = |-3| = 3$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 9$

Ex :- Find an equ of the largest sphere with center (5, 4, 9) that is contained in the first octant?

equation : $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-9)^2 = 16$

فكرة الحل : أصغر احداثي بالنقطة بمثل نصف القطر

$rad = 4$

Ex:

(*) هسا خدي نوع ثاني من الأمثلة و صيغة السؤال بتكون كالتالي

- what does this eqn Represent?
- Find the solution set?
- Identify this surface?

Example :- $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10 + 6y - 12z$

Solution :

أول اشي بعمل اكمال مربع عشان نشوف المعادلة أيش بتمثل.

$3x^2 + 3y^2 - 6y + 3z^2 + 12z = 10$

$3x^2 + 3(y^2 - 2y) + 3(z^2 + 4z) = 10$

ضرب

$3x^2 + 3(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) + 3(z^2 + 4z + 2^2 - 2^2) = 10$

جذرها الاشارة جذرها جذر الاشارة جذر

$3x^2 + 3(y-1)^2 + 3(z+2)^2 = 10 + 3 + 12$

$\frac{3x^2}{3} + \frac{3}{3}(y-1)^2 + \frac{3(z+2)^2}{3} = 25$

$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = \frac{25}{3}$ $\xrightarrow{\text{بتمثل}}$ sphere $C(0, 1, -2)$

$R = \frac{5}{\sqrt{3}}$

* خطوات أكمال المربع *

1) $\left(\frac{x \text{ معامل}}{2}\right)^2$

2) اضافة و طرح $\frac{1}{2}x$ معامل كله المعادلة

مثلاً : $x^2 - 2x$

$x^2 - 2x + 1^2 - 1^2$

جذرها الاشارة جذرها

$(x-1)^2 - 1$

$3x^2+3y^2+3z^2 = -15+6y-12z$

$3x^2+3(y-1)^2+3(z+2)^2 = 0$ point

$x=0 \ , \ y=1 \ , \ z=-2$

single point $(0,1,-2)$

$3x^2+3y^2+3z^2 = -16+6y-12z$

$3x^2+3(y-1)^2+3(z+2)^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ ما عنا معادلة نص قطرها سالب

$\therefore$ empty set $\emptyset$

* Note : to find the intersection, we must find the eqn of plane :-

* هاد النوع من الأسئلة بكون جوابو هيك :

* $x^2+y^2=r^2 \rightarrow$ circle
* $x^2+y^2>r^2 \rightarrow$ No Intersection
* $x^2+y^2=0 \rightarrow$ point

$(\qquad) = +ve$ circle

$(\qquad) = 0$ point

$(\qquad) = -ve$ No Intersection

* أطلع على المثال *

Example: Find an equation of the sphere with $c(2,-6,4)$ & $R=5$, Describe its intersection with each of the coordinate planes:

i) x-y plane ii) x-z plane iii) y-z plane

Solution

i) x-y plane $\rightarrow z = zero$

$$(x-2)^2+(y+6)^2+(z-4)^2=25$$

عوض

z=zero $(x-2)^2+(y+6)^2+(0-4)^2=25$

$$(x-2)^2+(y+6)^2=25-16$$

$$(x-2)^2+(y+6)^2=9 \rightarrow$$ circle, $c(2,-6)$ $R=3$

ii) x-z plane $\rightarrow y = zero$

$$(x-2)^2+(z-4)^2=25-36=-11$$

$$(x-2)^2+(z-4)^2=-11 \rightarrow$$ No Interseion

iii) y-z plane $\rightarrow x=0$

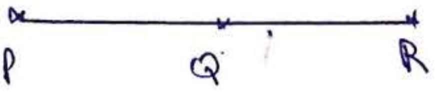
$$(y+6)^2+(z-4)^2=25-4$$

$$(y+6)^2+(z-4)^2=21 \rightarrow$$ circle مركزها $(-6,4)$ $R=\sqrt{21}$

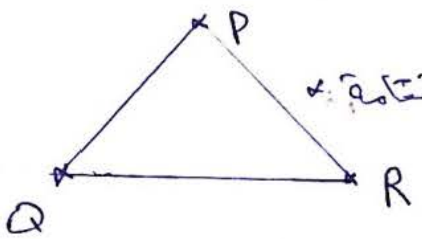
* when we have three points P, Q, R :-

* هاد الموضوع لما يكون معطيني 3-point ويسألني هما على استقامة واحدة (colliner) .
ولا مش على استقامة واحدة (non - colliner) .

[1] collinear :- على استقامة واحدة



[2] Non collinear :-



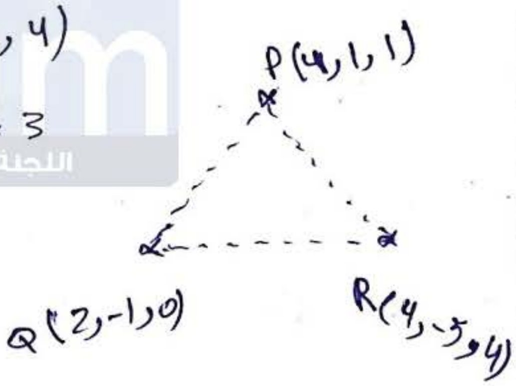
* ليسوا على استقامة واحدة
فشكل على الأغلب مثلث قائم أو متساوي الساقين

* عشان يكونوا (colliner) بجمع أقل مسافتين ولازم يكونوا بساوي المسافة الثالثة.

$PQ + QR \stackrel{??}{=} PR$

Example :- Are this points collinear or not ?

P(4,1,1) , Q(2,-1,0) , R(4,-5,4)



solution:

* $d(PQ) = \sqrt{(4-2)^2 + (1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

* $d(PR) = \sqrt{0 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

* $d(QR) = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

* بجمع أقل مسافتين و بقارنهم مع المسافة الثالثة

$3 + 6 \neq \sqrt{45}$:. But حقق فيثاغورس $(\sqrt{45})^2 = 3^2 + 6^2$

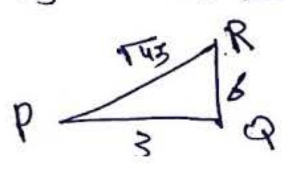
$\Downarrow$

Non collinear

لو كان سؤال مثلث بطبق فيثاغورس

$45 = 9 + 36$

$45 = 45 \Rightarrow$ مثلث قائم الزاوية



Example: $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$

solution :-

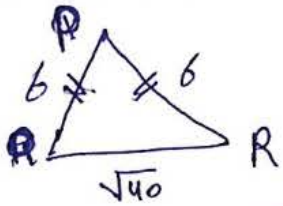
$$d(RQ) = \sqrt{6^2+2^2+0^2} = \sqrt{40}$$

$$d(QP) = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36}$$

$$d(RP) = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36}$$

$\Rightarrow$ so it's isoscales triangl

مثلث مساوي الساقين



Example: Find the distance between the $A(3,7,-5)$

I) x-y plane. IV) x-axis.

II) x-z plane. V) y-axis.

III) y-z plane.

* فكرة الحل :

معطيك نقطة وطالب تحسب المسافة بين هاي النقطة وال

x-y plane

x-z plane

y-z plane

Solution :-

I) x-y plane $\rightarrow$ $z = |-5| = 5 = d(A, \text{x-y plane}) = 5$

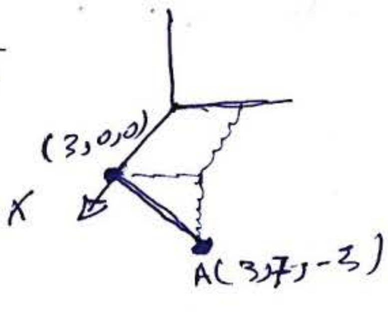
II) x-z plane $\rightarrow$ $y = |7| = 7 = d(A, \text{x-z plane}) = 7$

III) y-z plane $\rightarrow$ $x = 3 \rightarrow d(A, \text{y-z plane}) = 3$

IV) $d(A, \text{x-axis}) = \sqrt{(3-3)^2+(7-0)^2+(-5-0)^2}$

$= \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$

$\sqrt{y^2+z^2}$ خذ تربيع



V) $d(A-\text{y-axis}) = \sqrt{3^2+5^2}$

$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\sqrt{x^2+z^2}$ خذ تربيع

Example: Find the distance between the sphere

$$x^2+y^2+z^2=4 \quad \& \quad x^2+y^2+z^2=4x+4y+4z-11$$

Solution:

فكرة السؤال عندي معادلتين بدي أوجد المسافة بينهم.

$$x^2+y^2+z^2=4 \longrightarrow c_1(0,0,0),\ R_1=2$$

$$x^2+y^2+z^2=4x+4y+4z-11 \longrightarrow \text{completing square}$$

إكمال مربع

$$x^2-4x+y^2-4y+z^2-4z=-11$$

$$x^2-4x+2^2-2^2+y^2-4y+2^2-2^2+z^2-4z+2^2-2^2=-11$$

جذرها — اشارة — جذرها — جذرها — اشارة — جذرها

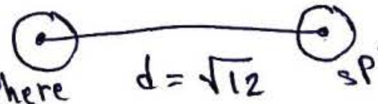
$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=-11+4+4+4$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$$

$$c_2(2,2,2),\ R_2=1$$

$$d(c_1,c_2)=\sqrt{4+4+4} \qquad c_1(0,0,0) \quad c_2(2,2,2)$$

$$=\sqrt{12}$$



هاي المسافة من مركز الكرة الأولى إلى مركز الكرة الثانية.

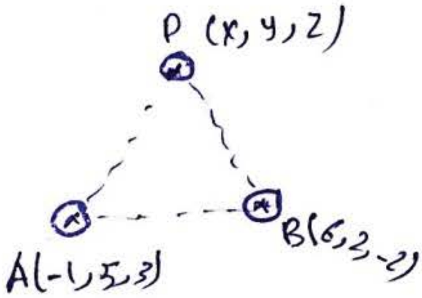
$$d(\text{sphere}_①,\text{sphere}_②)=\sqrt{12}-[2+1]$$

$$=\sqrt{12}-3$$

$$=2\sqrt{3}-3$$

هو طالب المسافة بين الكرتين فبطرح نصف القطر الأول ونصف القطر الثاني

* Find the equation of the set of all points equidistant from the points $A(-1, 5, 3)$
$B(6, 2, -2)$



$$|AP|^2 = |BP|^2$$

$$d(A, P) = (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2$$

$$d(B, P) = (x-6)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 10y + 25 + \cancel{z^2} - 6z + 9 =$$

$$\cancel{x^2} - 12x + 36 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} + 4z + 4$$

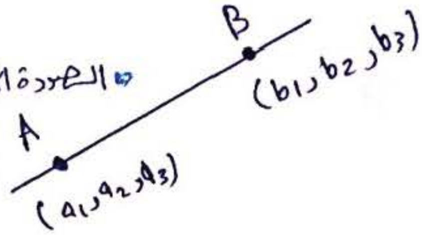
$$14x - 6y - 10z = 9$$

$$\left(0, 0, \frac{-9}{10}\right) \quad \#$$

12.2 :- * Vectors *

* $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\hat{i} + (b_2 - a_2)\hat{j} + (b_3 - a_3)\hat{k}$ * الصورة الأولى * لتمثيل Vector

↳ position vector



$\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3 \rangle$ * الصورة الثانية * لتمثيل Vector

$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \longrightarrow$ طول Vector * مقدار *

* Unit vector $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$ → عشان أطلع Unit vector

Example :- $\vec{a} = \langle 2, 1, 2 \rangle$

$\vec{b} = \langle 3, -4, 1 \rangle$

Find :-

1) $5\vec{a} \rightsquigarrow 5\vec{a} = \langle 10, 5, 10 \rangle$

2) $3\vec{a} + b \rightsquigarrow 3\vec{a} + \vec{b} = \langle 9, -1, 7 \rangle$

3) $|\vec{a}| \rightsquigarrow |\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

4) $\hat{a} \rightsquigarrow \hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|a|} = \dfrac{1}{3}\langle 2, 1, 2 \rangle$

$= \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

5) $|\vec{b}| \rightsquigarrow |b| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$

6) $\hat{b} \rightsquigarrow \hat{b} = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \langle 3, -4, 1 \rangle$

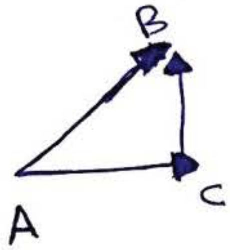
$= \langle \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \rangle$

Example: Given $\overline{AB} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$

$\overline{Ac} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

Find ① $\overline{cB}$

solution:



$cB = AB - Ac$

$= \langle 2, 3 \rangle - \langle 4, -2, 5 \rangle$

$\overrightarrow{cB} = \langle -2, 5, -5 \rangle$

oR $\overrightarrow{cB} = -2\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$

نجمع الأسهم المتعلقة مع بعض يساوي السهم الثالث

$Ac + cB = AB$

② $|cB| \rightsquigarrow |cB| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{54}$

③ find opposite unit vector cB.

عكسه — $\underbrace{\text{unit vector}}_{\text{بده unit vector}}$

solution:

$\hat{cB} = \frac{1}{\sqrt{54}} \langle -2, 5, -5 \rangle \rightsquigarrow$ unit vector

$\hat{cB} = \langle \frac{2}{\sqrt{54}}, \frac{-5}{\sqrt{54}}, \frac{5}{\sqrt{54}} \rangle \rightsquigarrow$ opposite unit vector

④ Find $\underbrace{\text{2-unit vector}}_{\pm \hat{AB}}$ parallel to $\overline{AB}$.

$|AB| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\hat{AB} = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle 2, 3 \rangle$

من كلمة

2-unit vector $\rightarrow$ $\hat{AB} = \pm \langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$

* **Ex:-** Find a vector of length $\underset{\sim}{6}$ in the opposite direction of $\langle 3, -4 \rangle$.

$\checkmark$

Solution:

$\vec{a} = \langle 3, -4 \rangle$

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\hat{a} = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \rangle \rightsquigarrow$ unit vector

Opposite $\rightarrow \hat{a} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

Length of vector (b) $= 6 * \langle \frac{-3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

$\vec{b} = \langle -\frac{18}{5}, \frac{24}{5} \rangle$

---

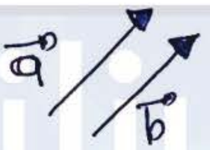
* **Note:-**

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{a} = \alpha \vec{b}$

يساوي

* توازي Vector



$\vec{a} \parallel \vec{b}$

تنفع لا يساوا بعضا إلا إذا كان واحد منهم مضروب برقم مثلاً (α)

رقم

* على الأغلب بكون واحد ضعف الثاني وبعكس الإشارة

Example: are these Vector Parallel or not.

هل 2-vector بوازوا بعض ولا لأ

Given: $\vec{a} = 2i - 3j + k$

$\vec{b} = -4i + 6j - 2k$

$-\frac{4}{2} \overset{?}{=} \frac{6}{-3} \overset{?}{=} -\frac{2}{1}$

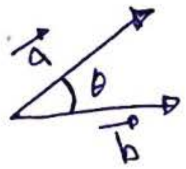
$-2 = -2 = -2 \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = -2\vec{a}$

$\boxed{\alpha = -2}$

13.3 Dot Product (scalar) نا

* $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

* $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$



$0 \le \theta \le \pi$

[1] $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \rightarrow i * i, \; j * j, \; k * k$

* الجواب بطلع معي رقم (scalar)

[2] $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$

[3] $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|} \rightarrow$ عشان اطلع زاوية بين 2-vector

Example: $\vec{a} = 2i - k$ Find the angle between $\vec{a}$ & $\vec{b}$

$\vec{b} = -i + 2j + 3k$

solution:

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}$

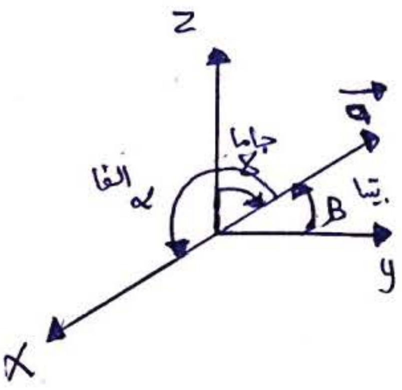
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2 + 0 + -3) = -5$

$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$|b| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

* $\cos\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-5}{\sqrt{14 \times 5}}\right)$ #

* Direction angle & the direction cosin :



* $\vec{a} = \vec{a}\cos\alpha\, i + \vec{a}\cos\beta\, j + \vec{a}\cos\gamma\, k$

يرجع
أصولها
Vector ل

* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ → * قانون حفظ *

*** Direction cosin ***

* $\cos\alpha = \dfrac{a_i}{|a|}$

* $\cos\beta = \dfrac{a_j}{|a|}$

* $\cos\gamma = \dfrac{a_k}{|a|}$

*** Direction angle ***

* $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{a_i}{|a|}\right)$

* $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{a_j}{|a|}\right)$

* $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{a_k}{|a|}\right)$

Example : $\vec{a} = 2i - 3j + k$ Find the direction cos in & direction angle.

Solution :

$|a| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\beta &= \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{14}} \end{aligned}\right\} \text{direcion cosin}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right) \\ \gamma &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \end{aligned}\right\} \text{direction angle}$$

Example: can these angles be dierection angles for any vector, $\alpha = 30$, $\beta = 60$, $\gamma = 45$.

solution:

بستخدم القانون هاد

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$(\cos 30)^2 + (\cos 60)^2 + (\cos 45)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \overset{??}{=} 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \overset{??}{=} 1$$

$$\frac{3}{2} \neq 1 \longrightarrow \text{No Represent vector}$$

فكرة الحل :. معطيني 3-angles وبكالي هل هدول بمثلو vector و γ ما بمثلو .
بجمع 3-angles وإذا طلع مجموعهن = 1 معناتو بمثلو vector.

Ex: If $\alpha = 30$, $\beta = 60$, Find γ.

solution:

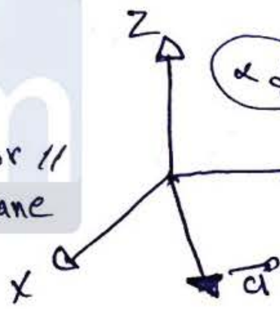
بستخدم نفس القانون السابق

$$(\cos 30)^2 + (\cos 60)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$1 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = 0$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\pi}{2}} \quad \therefore \text{vector} \parallel \text{xy-plane}$$



* للعلم α

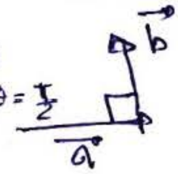
Properties of Dot product :-

1. $a \cdot b = b \cdot a$
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|a\|^2$
3. $a \cdot 0 =$ zero
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ zero if $a =$ zero oR $\vec{b} = \vec{0}$ oR $a \perp b \rightsquigarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$
5. If $\vec{a} \perp b \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$ zero

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ zero



6. $a \cdot (b + c) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
7. $\underbrace{L\vec{a} \cdot m\vec{b}}_{\text{ثوابت (أرقام)}} = (Lm)(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Example: $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

* find $-2\vec{a} \cdot 3\vec{b}$

$-2\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -6(\vec{a} \cdot \vec{b})$ حسب خاصية رقم 7

$= -6(-2 - 6 + 3)$

$= (-6)(-5) = 30$

Ex : Given $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, Find $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = ??$

solution :-

حسب خاصية رقم 2: $\|2a - 3b\|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \times 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 9 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$

$= 4\|a\|^2 - 12(a \cdot b) + 9\|b\|^2$ من قانون cosin

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos\theta$

$= 4(5)^2 - 12|5||8| \cos(\frac{2\pi}{3}) + 9(8)^2$

$= 100 + 240 + 576 = 916$

$|2a - 3b| = \sqrt{100^2 + 240^2 + 576^2} = 631.96$

Ex: Find 2-unit Vectors that make an angle of $60°$ with this vector: $\vec{V} = <3, 4>$

$|U| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = U_1^2 + U_2^2 = 1$

نفرض $\vec{U} = U_1 + U_2$ vector $\longrightarrow U_1^2 + U_2^2 = 1 \longrightarrow ②$

$|V| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$

$|V| = 5$

$\vec{U} \cdot \vec{V} = |V|\,|U| \cos\theta$

$3U_1 + 4U_2 = |5|\,|1| \cos 60$

$3U_1 + 4U_2 = \frac{5}{2}$

$6U_1 + 8U_2 = 5$

$\boxed{U_1 = \frac{5 - 8U_2}{6}} \longrightarrow ①$ $\xrightarrow{\text{عوض في } ②}$ $\left(\frac{5 - 8U_2}{6}\right)^2 + U_2^2 = 1$

6^2

$25 - 80U_2 + 64U_2 + 64U_2^2 = 64$

$64U_2^2 - 16U_2 - 39 = 0$

$U_2 = 0.92$

$U_2 = -0.66$

$U_1 = \frac{5 - 8(0.92)}{6}$

$U_1 = -0.39$

$U_1 = \frac{5 - 8(-0.66)}{6}$

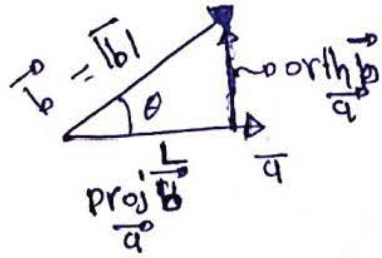
$U_1 = 1.71$

$\hat{U}_1 = <1.71, -0.66>$ #

$\hat{U}_2 = <-0.39, 0.92>$

* Projection :

$\boxed{1}$ scaler projection of $\vec{b}$ and $\vec{a}$



* compent of $\vec{b}$

$$* \; com_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|a|} \longrightarrow$$ حفظ!

$$* \; com_{\vec{a}}\vec{b} = L$$

$$\cos\theta = \frac{L}{|b|}$$

$\boxed{2}$ vector projection of $\vec{b}$ and $\vec{a}$.

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{b\cdot a}{\|a\|^2}\vec{b}$$ حفظ!

vector

$$L = |b|\cos\theta$$

$$comp_{\vec{a}} b = |b|\cos\theta * \frac{|a|}{|a|}$$

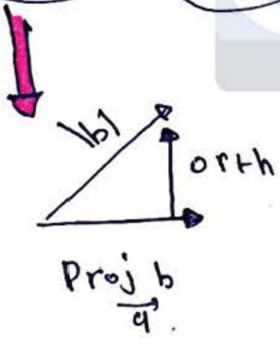
$$comp_{a} b = \frac{|a||b|\cos\theta}{|a|}$$

$$comp_{a} b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|}$$

* مش مطلوب الاشتقاق بس عشان تعرف منين أجى القانون

$\boxed{3}$ orthgonal projection $\vec{b}$ orth $\vec{a}$

$$orth = \vec{b} - proj_{\vec{a}}\vec{b}$$ حفظ



جمع الأسهم المتلاحقة

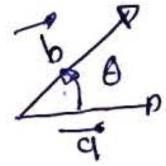
$$proj_{\vec{a}}\vec{b} + orth = |\vec{b}|$$

$$orth = \vec{b} - proj_{\vec{a}}\vec{b}$$

Example :- Given : $\vec{a} = 2i + j - 2k$

$\vec{b} = -3i + \hat{k}$

* find angle between $\vec{a}$ & $\vec{b}$



زي ما علمنا
فقط على قانون
cosin

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos\theta$

$-6 + 0 - 2 = |3||\sqrt{10}| \cos\theta$

$-8 = 3\sqrt{10} \cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{3\sqrt{10}} \right)$

$|a| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$|b| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$b \cdot a = a \cdot b$ ما راح نغير
Dot. Prouduct

2 * Find $\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|} = \frac{-8}{\sqrt{10}}$

المقام

$\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{-8}{3}$

3 $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} = ??$

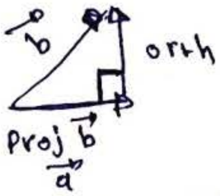
$\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{b \cdot a}{\|a\|^2} \vec{a}$

$= \frac{-8}{9} \langle 2, 1, -2 \rangle$

$= \langle -\frac{16}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{16}{9} \rangle$

4 $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{orth}_{\vec{a}} \vec{b} = ??$

من الشكل



Note :- $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot \text{orth}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{Zero}$

لأنو الزاوية بينهم $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{orth} = \vec{b}$

$\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{orth} = -3i + k = \vec{b}$

Example: Determin whethe then vectors orthgonal, parallel or neithe :- $\vec{a} = <-5, 3, 7>$

$\vec{b} = <6, -2, 2>$

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

① حل $\frac{6}{-5} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{7} \Rightarrow \vec{b}$ not parallel $\vec{a}$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$ يعني $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{zero}$

$a \cdot b = -30 - 6 + 14 \neq 0$ $\vec{a}$ not orth $\vec{b}$

$\therefore$ neither

Example: If $M = 2i + j$, $u = i + j$, $w = i - j$

* Find salar a and b such that $M = a\vec{u} + b\vec{w}$??

المطلوب إيجاد الثابت a & b. $M = a\vec{u} + b\vec{w}$

تعويض في المعادلة $2i + j = a(i + j) + b(i - j)$

بالمقارنة $2\cancel{i} = a\cancel{i} + b\cancel{i} \rightarrow$ معامل i

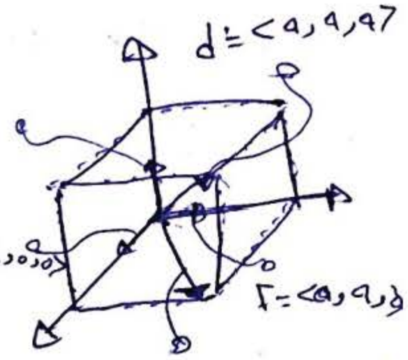
$2 = a + b \rightarrow ①$

$\cancel{j} = a\cancel{j} - b\cancel{j} \rightarrow$ معامل j

$1 = a - b \rightarrow ②$

$2 = a + \cancel{b}$
$1 = a - \cancel{b}$ $\rightarrow 3 = 2a$ $\boxed{a = \frac{3}{2}}$, $\boxed{b = \frac{1}{2}}$

* Find the angle between the diagonal of a cube of one edeges.



$H = \langle a, a, 0 \rangle$

$$\vec{d} \cdot \vec{F} = |d||F| \cos\theta$$

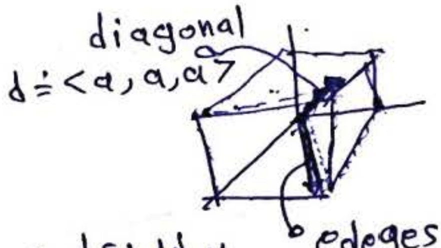
$$\langle a, a, a \rangle \cdot \langle a, a, 0 \rangle = \sqrt{3}\,a \cdot \sqrt{2}\,a \cos\theta$$

$$a^2 + a^2 = \sqrt{6}\,a^2 \cos\theta$$

$$2a^2 = \sqrt{6}\,a^2 \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2\cancel{a^2}}{\sqrt{6}\,\cancel{a^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$



المطلوب إيجاد الزاوية بينهم $F = \langle a, a, 0 \rangle$

$$|d| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a$$

$$|F| = \sqrt{a^2 + a^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$$

Example: If $\vec{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$ Find a vector $\vec{b}$: $comp_{\vec{a}}\vec{b} = 2$

& $|a| = \sqrt{10}$ Let $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

* فكرة السؤال *
* بدي أوجد $Vector\ \vec{b}$
من القانون إلي تعلمنا قبل شوي.

$$comp_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$2 = \frac{3b_1 - b_3}{\sqrt{10}}$$

$$2\sqrt{10} = 3b_1 - b_3$$

Let $\boxed{b_1 = 0} \rightarrow \boxed{b_3 = -2\sqrt{10}}$ & $\underbrace{b_2 = 0 \text{ OR } b_2 = 1}_{\text{أي قيمة}}$

$\vec{b} = \langle 0, 0, -2\sqrt{10} \rangle$

OR $\vec{b} = \langle 0, 1, -2\sqrt{10} \rangle$

Example: $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ & $R(6, -2, -5)$ are vertices of a triangle is it right triangle or not?

solution:

حل السؤال :
معطيني 3-pt وحكيلي هل بشكلو مثلث قائم الزاوية ولا؟ بقدر أحلو بطريقتين الطريقة إلي تعلمنا بالأول وهي إني اجيب المسافات بين النقاط

* $\vec{PQ} = \langle 1, 3, -2 \rangle$
* $\vec{PR} = \langle 5, 1, -3 \rangle$
* $\vec{QR} = \langle 4, -2, -1 \rangle$

$\vec{PQ}\cdot\vec{PR} = (5 + 3 + 6) \neq 0$ ✗

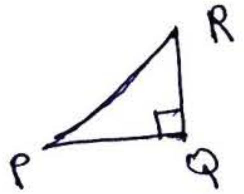
$\vec{PQ}\cdot\vec{QR} = (4 - 6 + 2) = 0$ ✓

وتطبيق فيثاغورس $(PQ)^2 + (QR)^2 \overset{??}{=} (PR)^2$

$\therefore PQ \perp QR \rightarrow PQ \cdot QR = zero$

angle between

$\underbrace{PQ \text{ \& } QR}_{\text{قائم في } Q}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

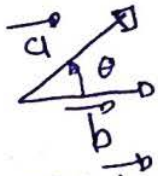


الحل الثاني هو :
أطلع 3-vector وأعمل D. Prod بينهم وأي أثنين بعطوني جواب zero معناته بتكون الزاوية $\frac{\pi}{2}$ فبكون مثلث قائم الزاوية.

12.4 Cross (vector) Product :-

Let $\vec{a}, \vec{b}$ be two vectors in 3-space

Defination : $\vec{a} \times \vec{b}$ as a vector



* Magnitued : $|a \times b| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$
* Direction : $a \times b$ is prependiculer to both $\vec{a}$ & $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

* $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{Zero}$, since $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
* $b \cdot (\vec{a} \times b) = \text{Zero}$, since $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

* الإشارات ثابتة *

* $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$$|a \times b| = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ + & - & + \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = +(a_2 b_3 \underset{\text{ثابتة}}{-} b_2 a_3) i - (a_1 b_3 \underset{\text{ثابتة}}{-} b_1 a_3) j + (a_1 b_2 \underset{\text{ثابتة}}{-} b_1 a_2) k$$

Example :- $\vec{a} = 2i + 3j - 4k$ find : 1 $\vec{a} \times b$

$\vec{b} = -i + 3k$ 2 $|a \times b|$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = (3 \times 3 - (0 \times -4)) i - (2 \times 3 - (-1 \times 4)) j + (2 \times 0 - (-1 \times 3)) k$

* $\vec{a} \times \vec{b} = 9i - 10j + 3k \rightarrow$ vector الناتج يطلع

(vector)

* $|a \times b| = \sqrt{9^2 + 10^2 + 3^2}$

$= \sqrt{94}$

(magnitued)

* لما بدي أطلع i بغطي على العمود الأول ،
* // // // j بغطي // الثاني .
* // // // k // // // الثالث ،

* Find the angle between $\vec{a} = 2i + 3j + k$
$\vec{b} = i + j - k$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$|a| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|b| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

* دائماً لإيجاد الزاوية نستخدم قانون cosin

$2+3-1 = \sqrt{14}\cdot\sqrt{3}\cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14\times3}}\right)$ #

* Properties of cross product :-

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

الاشارة مهمة

2. $a\times(b+c) = \underbrace{a\times b + a\times c}_{\text{الترتيب مهم}}$

3. $(b+c)\times\vec{a} = \underbrace{b\times a + c\times a}_{\text{الترتيب مهم}}$

4. $L\vec{a}\times m\vec{b} = L\times m(\vec{a}\times\vec{b})$

5. $\vec{a}\times\vec{a} = \text{Zero} \longrightarrow |\vec{a}\times\vec{a}| = |a||a|\sin\theta$ $\boxed{\text{Zero} = \theta}$

$\vec{a}\times\vec{a} = \text{Zero}$

6. $\vec{a}\parallel\vec{b} \Longrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \text{zero}$ لانو الزاوية راح تكون $\theta = 0$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{مهم}}$

7. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ حفظ !!

Dot.Product

الترتيب جداً مهم

Scanned by CamScanner

Ex :- $\vec{a} = i + 2j - k$

$\vec{b} = 2i - 3j + 4k$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Find :-

1) $\vec{a} \times \vec{b} = 5i - 6j + (-7k)$

2) $\vec{b} \times \vec{a} = -(a \times b)$ من خصائص cross - product

$= -5i + 6j + 7k$

3) $2\vec{a} \times 3\vec{b} = 6(a \times b)$

$= 6(5i - 6j - 7k)$

$= 30i - 36j - 42k$

Example :- $\vec{a} = 2i + j - k$

$\vec{b} = 3i - 2j + k$

$\vec{c} = -i + 2j + 2k$

Find :-

1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

* بقدر أحل (bxc) بعدين الجواب إ طلع بعمل cr.p كمان مرة $\boxed{\text{الجواب } a \times}$

* أو حل على الخاصية إلي تعلمنا قبل شوي

$\vec{a} \times (b \times c) = (a \cdot c) \cdot b - (a \cdot b) \cdot c$

$= (-\cancel{2} + \cancel{2} - 2) \cdot \vec{b} - (6 - 2 - 1) \cdot \vec{c}$

$= -2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{c}$

$= -2(3i - 2j + k) - 3(-i + 2j + 2k)$

$= -6i + 4j - 2k - [-3i + 6j + 6k]$

$= -3i - 2j - 8k$

Note :- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times c \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

لا تساوي

Example: Find an example to show that

$(a\times b)\times c \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$,

solution:

$(a\times b)\times c \overset{??}{=} \vec{a}\times(b\times c)$

$(i\times i)\times j = i\times(i\times j) \to$ أي أشي بتقدر تعوض

$\vec{0}\times j = i\times k$

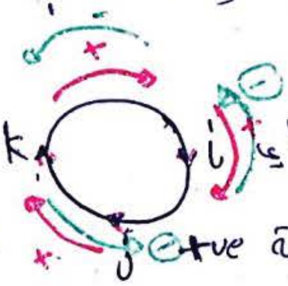
$0 \neq -j$ #

عكس عقارب الساعة -ve

امشي مع الرأس

* هسا بدنا نثبت انو ما بساوي بعض عبعض؟

* برسم الدائرة هاي



● مع عقارب الساعة +ve

● عكس عقارب الساعة -ve

Ex: Given $\vec{a}\perp\vec{c}$, $c = 2i+j-3k$, $|a|=2$, $|b|=3$

& $\theta=\frac{\pi}{3}$ Find $(\vec{a}\times(b\times c))$??

* الحل على الخاصية *

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$\vec{a}\times(b\times c) = (a\cdot c)\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot c$

$= 0 - [(2)(3)\cos\frac{\pi}{3}]\cdot\vec{c}$

من السؤال حكيلي

$a\perp c \to a\cdot c = \text{zero}$

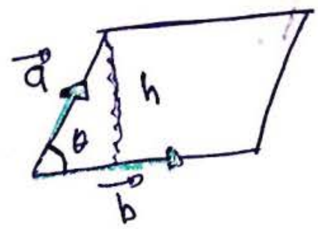
$= -3(2i+j-3k)$

$= -6i-3j+9k$ #

* Geometrical Meaning of $|\vec{a} \times \vec{b}|$:-

$Area_{\square} = base * height$

Area = الأرتفاع * القاعدة



مساحة متوازي المستطيلات $= |b| \cdot h$

$= |b|\,|a| \sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{h}{|a|}$

$h = |a| \sin\theta$

$\therefore \longrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |a|\,|b| \sin\theta$

$\Downarrow$

* مساحة متوازي المستطيلات * $|a \times b|$ OR $|b \times a|$

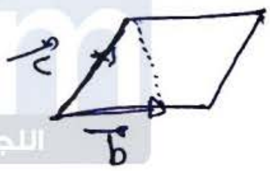
ما بطرق لأني راح أخذ القيمة المطلقة

Example :- Find the area of parallogram with $\vec{c}$ & $\vec{b}$ $= |\vec{c} \times \vec{b}|$ if $\vec{c} = -i + 2j + 2k$

$\vec{b} = 3i - 2j + k$

1 $|\vec{c} \times \vec{b}| = 6i + 7j - 4k$

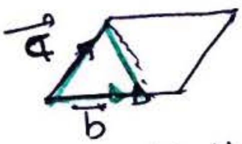
$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$



$||\vec{c} \times \vec{b}|| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 4^2}$

$= \sqrt{101}$

2 Find the area of Triangle. ⟶



$Area_{\Delta} = \frac{1}{2} * area_{\square}$

$= \dfrac{\sqrt{101}}{2}$

• حكالي بالسؤال

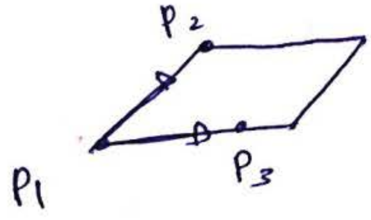
بدي مساحة المثلث بطلع مساحة

متوازي الأضلاع و بقسم على 2

$$Area_{\Delta} = \frac{Area_{\square}}{2}$$

Ex: Find the area of Triangle with vertices

$P_1(1,0,2)$, $P_2(-1,3,1)$, $P_3(0,1,4)$



$\overrightarrow{P_1P_2} = -2i + 3j - k$

$\overrightarrow{P_1P_3} = -i + j + 2k$

* جبت 2-vector عشان أطلع مساحة متوازي الأضلاع وبعدين أطلع مساحة المثلث

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2} = 7i + 5j + k$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$|P_1P_2 \times P_1P_2| = \sqrt{7^2+5^2+1^2}$

$= \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$

Area of Triangle $= \dfrac{\sqrt{75}}{2}$

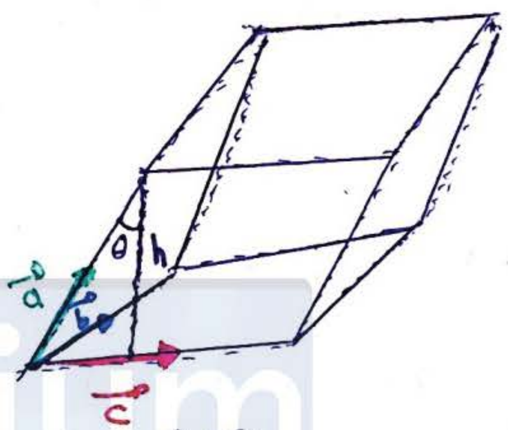
* Triple scaler Product :-

* $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ~ * دائماً الجواب * بكون رقم "scaler"

* Volume of Parallepiped = Area . hieght

* هاي الخاصية منستخدمها لما أحسب حجم متوازي الأوجه.

$V = |\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})|$



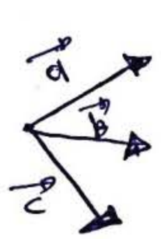
Area $= (\vec{c} \times \vec{b})$

$h = \cos\theta \ \vec{a}$

$V = (c \times b) \cdot \vec{a} \cos\theta$

* إذا طلع الحجم مساوي = zero

بكونوا 3-vector على نفس المستوى (Plane)



يعني على نفس Plane → في مثال على هاد الشي لقدام

∴ coplaner

Example:- $\vec{a} = 2i + j - k$, $b = 3i - 2j + k$

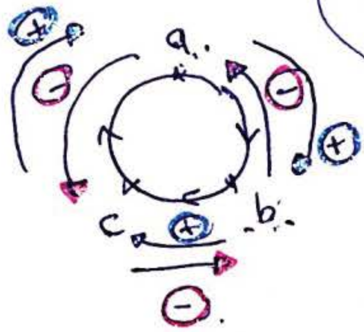
$\vec{c} = -i + 2j + 2k$

Find:-

① $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 2((-2\times 2) - 2\times 1) + (-7) - 4 = -23$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

② $\vec{c} \times \vec{b} \cdot \vec{a} \longrightarrow$ بنمشي حسب الدائرة



$(c \times b) \cdot a = a \cdot (-b \times c)$

$= -(-23) = 23$

③ $c \cdot b \times a = -(-23) = 23$

④ $b \cdot c \times a = -23$

⑤ $\vec{a} \cdot 3b \times c = 3(a \cdot b \times c)$

$= 3(-23) = -69$

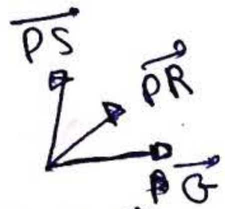
Example:- Find the volume of parallepiped with adjacent side (متجاورة) $\overline{PG}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ where $P(-2,1,0)$, $G(2,3,2)$, $R(1,4,-1)$, $S(3,6,1)$

$V = PG \cdot \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}$

* طالب مني حجم متوازي الأوجه بدي 3-vec عشان أقدر أطبق خاصية Triple scaler Prod.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$V = 32 - 16 + 0 = 16$



$\overrightarrow{PG} = \langle 4, 2, 2 \rangle$

$\overrightarrow{PR} = \langle 3, 3, -1 \rangle$

$\overrightarrow{PS} = \langle 5, 5, 1 \rangle$

Example:- Given A(1, 3, 2), B(3, -1, 6), C(5, 2, 0) &
D(3, 6, -4) are these points coplaner or not ??

$\vec{AB} = \langle 2, -4, 4 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 4, -1, -2 \rangle$

$AD = \langle 2, 3, -6 \rangle$

* يكون 3-vector ويطبق خاصية Triple scaler product وإذا طلع الجواب zero يكونوا على استقامة واحدة (copleane)

$AD \cdot (\vec{AC} \times AB) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

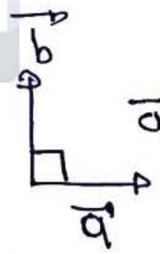
$= 2[-4-8] - 3[16+4] - 6[-16+2] = \text{zero}$

its coplaner

Example: Find 2unit vector orthogonal to both

$\vec{a} = i + j + k$ & $\vec{b} = 2i + k$??

عموديان على بعض



$\vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{zero}$ *

$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} =$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$|a \times b| = \sqrt{1+1+4}$
$= \sqrt{6}$

$\pm \dfrac{a \times b}{\|a \times b\|} = \pm \dfrac{(i + j - 2k)}{\sqrt{6}}$

→ 2unit vecor

* هدول حكالي في السؤال

Ex :- Show that $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$.

$$\underbrace{(a \cdot b)^2}_{\|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\theta}$$

الحل:

فكرة الحل: المطلوب مني اثبات أن الحد الأيمن = الحد الأيسر

نبدأ بالطرف الأيمن أو الأيسر

$$\|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta$$

عامل مشترك

$$= \|a\|^2\|b\|^2 (\underbrace{1 - \cos^2\theta}_{\text{متطابقة}})$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta$$

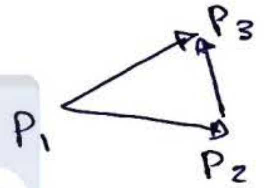
$$= \|a \times b\|^2$$ #

سؤال سنوات 2012 : Given $\overline{P_1P_2} = \langle 2, 3, -4 \rangle$, $\overline{P_1P_3} = \langle 1, 0, 1 \rangle$, answer question 1, 2, 3.

فكرة الحل:

لازم بالأول أطلع $\overline{P_2P_3}$.

Q1) $\text{Proj}_{-2\overline{P_1P_2}} \overline{P_2P_3} =$



زي ما تعلمنا نجمع الأسهم المتلاحقة. المجهول

$$\overline{P_1P_2} + \boxed{\overline{P_2P_3}} = \overline{P_1P_3}$$

$$\overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_3} - \overline{P_1P_2}$$

$$\overline{P_1P_3} = \langle -1, -3, 5 \rangle$$

$\rightarrow \overline{P_2P_3} = \langle -1, -3, 5 \rangle$

$\rightarrow -2\overline{P_1P_2} = \langle -4, -6, 8 \rangle$

$$\text{Proj}_{-2\overline{P_1P_2}} \overline{P_2P_3} = \frac{\overline{P_2P_3} \cdot -2\overline{P_1P_2}}{|-2P_1P_2|^2} (-2P_1P_2)$$

$$= \frac{\langle -1, -3, 5 \rangle \cdot \langle -4, -6, 8 \rangle}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 8^2}} \langle -4, -6, 8 \rangle$$

$$= \frac{86}{116} \langle -4, -6, 8 \rangle = \left\langle -\frac{344}{116}, -\frac{516}{116}, \frac{688}{116} \right\rangle$$ #

$\boxed{Q_2}$ comp $\overline{P_1P_2}$ = ??

$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_2P_3}$

الحل

$$\text{comp}_{\overline{P_1P_2} \times \overline{P_2P_3}} \overline{P_1P_2} = \frac{P_1P_2 \cdot (P_1P_2 \times P_2P_3)}{|\overline{P_1P_2} \times P_2P_3|}$$

$$= \frac{\langle 2, 3, -4\rangle \cdot \langle 3, -6, -3\rangle}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-3)^2}}$$

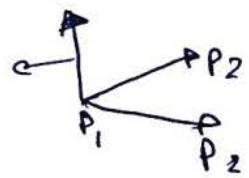
$$P_1P_2 \times P_2P_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \langle 3, -6, -3\rangle$$

$$= \frac{6 - 18 + 12}{\sqrt{9 + 36 + 9}} = \frac{0}{\sqrt{9 + 36 + 9}} = \text{zero}$$

$\boxed{Q_3}$ Find a vecto $\vec{V}$ of length $\boxed{3}$ orthogonal to both $\overline{P_1P_2}$ & $\overline{P_1P_3}$.

عمودي على كل من $\overline{P_1P_2}$ & $\overline{P_1P_3}$

orth n



الحل

$n = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$

$\vec{n} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

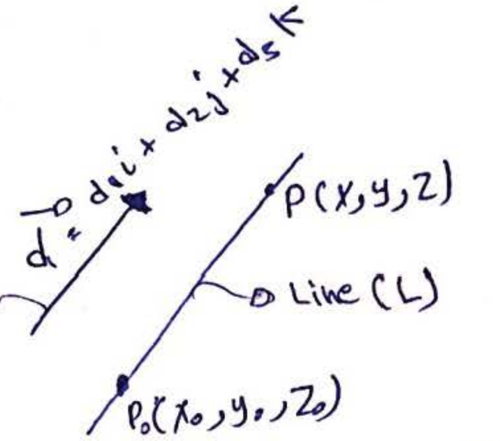
$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{54}$

$\hat{n} = \langle \frac{3}{\sqrt{54}}, -\frac{6}{\sqrt{54}}, -\frac{3}{\sqrt{54}} \rangle$

$\rightarrow \vec{V} = \underset{\text{من السؤال}}{3} \cdot \langle \frac{3}{\sqrt{54}}, \frac{-6}{\sqrt{54}}, \frac{-3}{\sqrt{54}} \rangle = \langle \frac{9}{\sqrt{54}}, \frac{-18}{\sqrt{54}}, -\frac{9}{\sqrt{54}} \rangle$

12.5:- Equations of lines & Planes :-

* Lines:-



* d (Vector) // L (Line)

$$d = tL$$

$$d = t\overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = td$$

* يعني أن Vector (d) يوازي Line لكنه لا يساويه إلا إذا كان واحد منهم مضروب برقم.

* الرقم هوه t

$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k$

* $(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k = t(d_1 i + d_2 j + d_3 k)$ — مش مطلوب منك تعرف الاشتقاق بس عشان تعرف من وين أجت المعادلة

بالمقارنة

$x - x_0 = td_1 \longrightarrow$
$y - y_0 = td_2 \longrightarrow$
$z - z_0 = td_3 \longrightarrow$

حفظ

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + td_1 \\ y &= y_0 + td_2 \\ z &= z_0 + td_3 \end{aligned}}$$

* تمثل معادلات الخط Parametric

المعامل دائماً واحد

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}$$

(t = t = t)

* تمثل معادلات الخط لـ symmetric

حفظ !!

(x_0, y_0, z_0) — نقطة على الخط

(d_1, d_2, d_3) — Vector يوازي الخط

* هلأ من كل الكلام بهمني تعرف تكتب معادلة Line لـ Parametric & Symmetric.

* وأي Vector بالدنيا بوازي Vector ثاني لكنه لا يساويه إلا إذا كان مضروب برقم.

* خطوات حل السؤال

1) Vector يوازي Line. Parallel بدور على

2) Line نقطة على *

Ex : write parametric Eqn of the Line containg the Point يمر

(1, -2, 3) of Parallel to 2i + 3j − K.
يوازي

①

$$d = \underset{d_1}{2}i + \underset{d_2}{3}j \underset{d_3}{-}k \rightarrow$$ يوازي vector

* زي ما حكينا بالزمن يوازي vector Line

ونقطة على Line.

فكرة السؤال ، حكيلي اكتبلي معادلة Line

المار بالنقطة (1,-2,3) ويوازي vector

, d = 2i + 3j − k

طبعاً بدو أياها بصورة

$\boxed{\text{Parametric}}$

L:

$x = 1 + 2t$

$y = -2 + 3t$

$z = 3 - t$

---

② Find another point on Line:

* لنفس السؤال حكيلي بدي نقطة على الخط.

* عوض أي رقم t = بدك إياها

$\cancel{t=5}$ $\boxed{t = 0}$ $x = 1 + 2(0) \rightarrow x = 1$

$y = -2$

$z = 3$

P(1, -2, 3)

③ Is this point (5, 1, 4) on Line or not.

* لنفس السؤال حكيلي هاي النقطه تقع على الخط ولا لأ.

solution:

للازم أنا أعوض النقطة في المعادلة يعطيني قيمة نفسها t ، هيك

$x = 1 + 2t$

$\rightarrow x = 5 \rightarrow 5 = 1 + 2t$

$4 = 2t \rightarrow \boxed{t = 2}$

$y = 1 \rightarrow y = -2 + 3t$

$1 = -2 + 3t$

$3 = 3t$

$\boxed{t = 1}$

* مش نفسها

معناته النقطه لا تقع على الخط

Ex: write symetric eqn of line passes this $P(-1, 2, 4)$ and parallel to $3i + j - k$.

الخطوات

1) بدور على نقطة

2) Line يوازي Vector

Vector بجيب Line اذا يوازي

$d = 3i + j - k$

$$L: \rightarrow \frac{x-(-1)}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

② give point on Line.

$$t = \frac{x+1}{3} \rightarrow \boxed{t = 1} \rightarrow 1 = \frac{x+1}{3} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

فرضا

$$1 = \frac{y-2}{1} \rightarrow 1 = y - 2 \rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$1 = \frac{z-4}{-1} \rightarrow -1 = z - 4 \rightarrow \boxed{z = 5}$$

$P(2, 3, 5)$

حطوهم نفسها

Ex write parametric eqn of the line L_1 passing through the pt $(2, -1, 3)$ & parallel to Line : $L_2 : \frac{2x+1}{4} = \frac{1-y}{3} = -z$

$$\frac{2x+1}{4} = \frac{1-y}{3} = -z$$

فكرة السؤال ما اعطاني نقطة على الخط

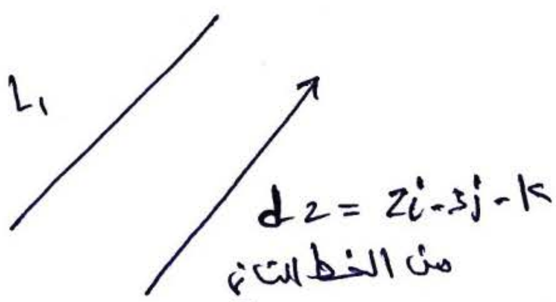
ما بدي Vector بجيبه من معادلة L_2.

المعامل لازم يكون واحد

$$\frac{x+1}{\frac{4}{2}} = \frac{1-y}{\frac{3}{-1}} = \frac{z}{\frac{1}{-1}}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

$d_2 = 2i - 3j - k$ → Vector يوازي الخط الأول



Eqn Line: Parametric

$x = 2 + 2t$

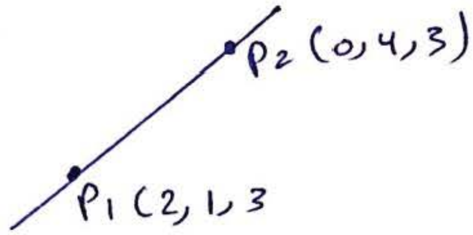
$y = -1 - 3t$

$z = 3 - t$

Example: Write symmetric Eqn of the line passing through the two point $P_1(2,1,3)$, $P_2(0,4,3)$.

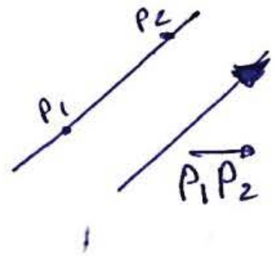
$\overrightarrow{P_1P_2} = -2i + 3j + 0k$ → Vector يوازي

$d_3 = $ zero Line



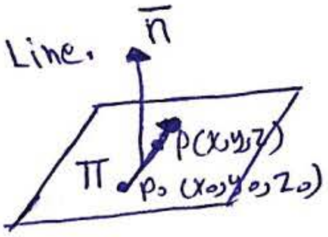
P_1 OR P_2 → نقطة على Line

L_1: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3}$, $Z = 3$ لازم نكتبها بالصورة هاي لأن قيمة $d_3 = 0$



Planes :-

$\vec{n} = ai + bj + ck \longrightarrow$ Vector normal (عمودي) to the Line.



$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k \longrightarrow$ Vector

يوازي Parallel to the plane

$n \perp P_0P \xrightarrow{\text{يعني}} \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \text{Zero}$

عمودي

* $\overrightarrow{P_0P} \parallel \pi$
* $n \perp \pi$
* $n \perp P_0P$

$(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k \cdot ai + bj + ck = \text{Zero}$

* $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = \text{Zero} \longrightarrow$ * معادلة plane * الصورة الأولى

* $ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{\text{constant ثابت} = d} = 0$

* $ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow$ * معادلة plane * الصورة الثانية

● هسا من كل الحكي إلي مكتوب فوق بحضر تعرف صورة معادلة plane الأولى والثانية ومش مطلوب منك كيف اجبت المعادلة بس فقط عشان تعرف كيف جبنا المعادلة ●

● خطوات حل سؤال الـ plane ●

1) دائماً بدور على نقطة تقع على plane.

2) Vector عمودي على plane وهيك بكون جبت أي معادلة plane.

* $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = \text{Zero}$ * Eqn of the plane *

* $\langle a, b, c \rangle = n \longrightarrow$ Vector موجه * العمودي على plane

* $P(x_0, y_0, z_0) \longrightarrow$ plane نقطة على *

Example: Write an eqn of the plane(π) containing the point $P_0(2,1,-1)$ & perpendiculer on the Line

$L: x = 2t, \quad y = 1-3t, \quad z = 1-4t$

a b c

نقطة تقع على plane

* أول إشي بدور على نقطة على plane
* بدي vector عمودي على plane

* $\vec{n} = 2i - 3j - 4k$ من معادلة الخط

* حل السؤال:

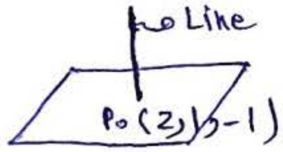
معطيني نقطة على plane $p(2,1,-1)$

ومن معادلة الخط بطلع الـ normal على plane

* $P(2,1,-1)$ point on the plane

Eqn of the plane:

$\pi: 2(x-2) - 3(y-1) - 4(z+1) = \text{zero}$



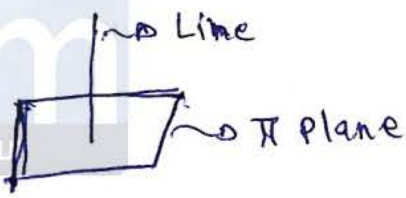
Example: Write an eqn of line perpendiculer to the plane $\pi: 2x + 3y + 1 = z$ & containing the point $(2,0,1)$.

$d_1 \quad d_2 \quad d_3$

* طالب معادلة الخط العمودي على plane

solution:

1) بدي vector يوازي الخط
2) نقطة على الخط



$n = \langle 2, 3, -1 \rangle$ عمودي على plane

من السؤال $L \perp \pi$

$\rightarrow n \perp \pi$

$\rightarrow L \parallel n$

$n \parallel L$

$$L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-\text{zero}}{3} = \frac{z-1}{-1}$$ *

Ex:- Identify this equation:-

$2x+3y=1$ in : i) 2-space
ii) 3-space

solution:

→ $2x+3y=1$ → Eqn of the line → 2-space

$2x+3y=1$ → 3-space → plane

Ex:- $2x+3y=1$, $z=4$

∴ Line

* دائماً إذا حددلك البعد الثالث إلي هوه بعد الفاصلة بتكون معادلة Line

* لو ماحددلك بتكون معادلة plane ← 3-space

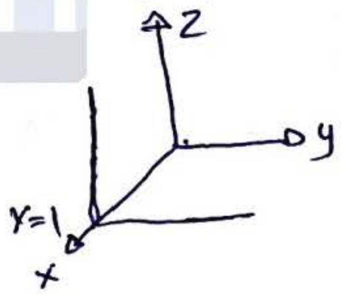
2-space ← Line

---

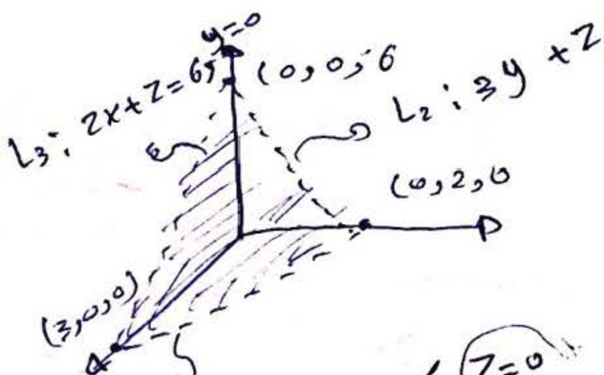
① $x=1$ → 3-space → plane // yz-plane

② $2x+3y=6$ → plane // z-axis.

* وحكينا هاد الإشي من قبل وهاي رسمتو



③ $2x+3y+z=6$ → plane



L_1: $2x+3y=6$, $z=0$

* لازم احدد البعد الثالث عشان تكون معادلة Line

* ملاحظة مهمة:

مهما بالسؤال لو ما حكالك 3-space

بعتبر المعادلة 3-space.

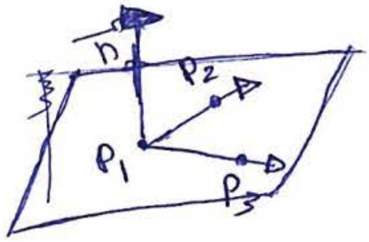
يعني بكتبلو أيش بتمثل المعادلة في 3-space.

Ex :- Write an eqn of the plane containing $P_1(2,1,3)$ و
يمر

$P_2(0,1,1)$ & $P_3(4,2,4)$.

فكرة الحل :

* بدي vector عمودي على plane
* نقطة على plane .



* شوف الرسمة بالأعلى

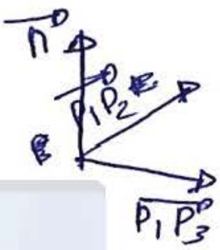
* منا بطلع vector عمودي عليهم معناتو بلزمني اعمل cross Product

* وعطاني 3 point في السؤال باخذ أي نقطة منهم ،

solution :-

$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 0-2, 1-1, 1-3 \rangle \rightarrow P_1P_2 = \langle -2, 0, -2 \rangle$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \langle 2, 1, 1 \rangle$



$$n = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{n} = 2i - 2j - 2k$, $P_1(2,1,3)$

عمودي على plane

$\pi : 2(x-2) - 2(y-1) - 2(z-3) = \text{zero}$

Ex :- Find an eqn of the plane consisting of all points (الذي) that are equidistant from the two points

$P_1(1,0,-2)$, $P_2(3,4,0)$. مسافة متساوية

* من السؤال حكيلي بدي معادلة plane يقع في منتصف المسافة بين النقطتين ويبعد عن كل منهما مسافة متساوية ،

① نقطة على plane

② vector بدي

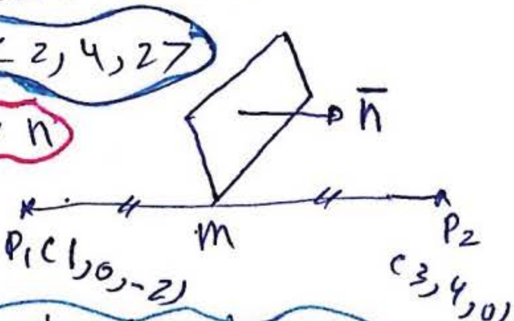
$P_1P_2 \perp \pi$

OR $MP_2 \perp \pi$

OR $P_1M \perp \pi$

$P_1P_2 = \langle 2, 4, 2 \rangle$

$P_1P_2 \parallel n$



$M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+-2}{2}\right)$

$P(2, 2, -1) \rightarrow$ هاي نقطة على plane

$\pi : 2(x-2) + 4(y-2) + 2(z+1) = \text{zero}$

* Lines in 3-space :

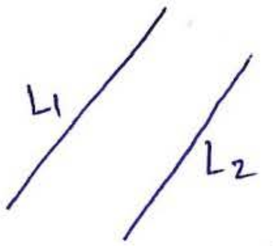
[A] $L_1 \overset{يوازي}{//} L_2 \longrightarrow L_1 \neq L_2$

لا يساوي

$\vec{d}_{L_1} \,//\, \vec{d}_{L_2}$

لأنه إذا كان واحد منهم مضروب برقم.

$\vec{d}_{L_1} \times \vec{d}_{L_2} = zero$



$0 \le \theta \le \pi$

L1 Parallel L2

$\longrightarrow d_{L_1} = \alpha\, d_{L_2}, \ \alpha \in R$

عدد

* بكون واحد منهم ضعف الثاني وعكس الإشارة.

* There in a plane containing two parallel.

هاي الملاحظة مهم جداً

Example: $L_1 : x = 1-t, \ y = 2+2t, \ z = -3t$

$L_2 : x = 2s, \ y = 1-4s, \ z = -1+6s$

قسم معامل s على معامل t أو العكس

$\longrightarrow \frac{s}{t} . \quad \frac{2}{-1} \stackrel{?}{=} \frac{-4}{2} \stackrel{?}{=} \frac{6}{-3}$

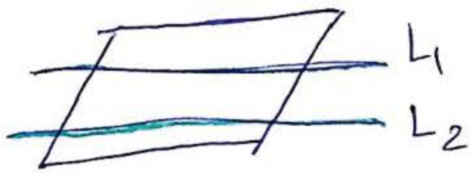
$-2 = -2 = -2 \ \therefore \longrightarrow L_1 // L_2$

← بيبين معادلة النظر أنه واحد ضعف الثاني وعكس الإشارة.

* شو معنى الملاحظة *

* في حالة توازي 2-Line بكون في plane يمر فيهم ← يعني نقطة على الخط الأول هي نقطة على plane.

← نقطة على الخط الثاني هي نقطة على plane.



راح اشرح هاي الملاحظة بالضبط في الأمثلة.

الماء
Ex: Find eqn of the plane containing the 2-Line

$L_1 : x = 1-t \ , \ y = 2+2t \ , \ z = -3t$

$L_2 : x = 2s \ , \ y = 1-4s \ , \ z = -1+6s$

معاملات t

$dL_1 = \langle -1 , 2 , -3 \rangle$

معاملات S

$dL_2 = \langle 2 , -4 , 6 \rangle$

$* \ dL_1 \times dL_2 = 0$ ما استفدت أشي

$* \ n = dL_1 \times dL_2 = zero \rightarrow$ vecto عمودي على plane.

L_1

L_2

$L_1 \parallel L_2$

* بالنظر *

$\Downarrow$

* لشوو بتفهم أنو في plane بمر فيهم.

* فكرة الحل :

عندي 2-Line موازيين لبعض بدي أكتب معادلة plane فيهم و في حالة التوازي 2-Line $\boxed{\text{بكون في plane بمر فيهم}}$ يعني $L_1 \& L_2 \parallel \pi$.

* عشان أكتب معادلة plane بلزمني normal vector بس المشكلة إنه عندي أنو $dL_1 \times dL_2 = zero$ ما استفدت اشي،

* الحل : أنو أطلع نقطة من الخط الأول و نقطة من الخط الثاني وكون بينهم vector ($\overrightarrow{P_1P_2}$) بعدين أعمل cross. product بين $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{L_1}$ أو $P_1P_2 \times L_2$ هيك بكون طلعت ال vector العمودي على plane.

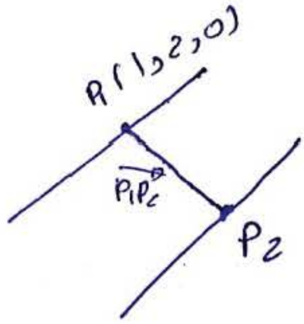
* وعشان أطلع نقطة بطلعها من الخط الأول أو من الخط الثاني حسب أنا شو أخذت $P_1P_2 \times L_1$ بطلع نقطة من الخط الأول

$P_1P_2 \times L_2$ بطلع نقطة من الخط الثاني

* حل السؤال بالصفحة التالية

L_1 ; $x = 1-t$, $y = 2+2t$, $z = -3t$

L_2 ; $x = 2s$, $y = 1-4s$, $z = -1+6s$

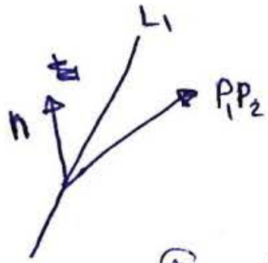


$t = 0 \rightarrow L_1 \rightarrow x = 1$, $y = 2$, $z = 0$

$P_1(1,2,0)$

$s = 0 \rightarrow L_2 \rightarrow x = 0$, $y = 1$, $z = -1$

$P_2(0,1,-1)$



$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

$dL_1 = \langle -1, 2, -3 \rangle$

$P_1P_2 \times dL_1$ OR $P_1P_2 \times dL_2$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ i & j & k \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$n = P_1P_2 \times dL_1$

$n = -5i + 2j + 3k \rightarrow$ عمودي على plane

$P_1(1,2,0) \rightarrow$ point on the plane

π ; $-5(x-1) + 2(y-2) + 3(z-0) = 0$

* بتقدر تحله حل ثاني إذا تأخذ

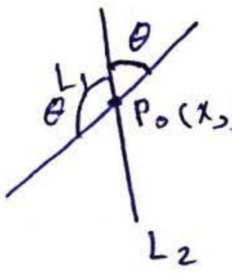
$n = P_1P_2 \times dL_2$

$P_2(0,1,-1)$

B Intersected . * التقاطع *

$$\cos\theta = \frac{|dL_1 \cdot dL_2|}{|dL_1|\,|dL_2|}$$

عشان اجيب الزاوية بين خطين متقاطعين



* نقطة تقاطع *

L_1 يتقاطع L_2 بستخدم قانون cosin

$\theta \longrightarrow$ acute حادة

obsut منفرجة

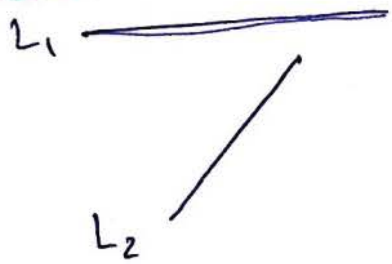
* و السؤال بحدد لك أي زاوية *

* Note : There in a plane containing two intersectd Lines

* في حالة تتقاطع Z-Line بكون في plane يمر فيهم .

C Skew Lines . * التخالف *

* There in <u>No</u> plane containing them .



* لا يوجد plane يمر فيهم *

* Not parallel & Not intersected *

* حالة اثبات أنو الخطين متخالفين *

1) بشوف إذا الخطين متوازيين أو لا

2) بشوف إذا الخطين متقاطعين أو لا

3) إذا كانا الخطين غير متوازيين وغير متقاطعين معناتو هما متخالفين .

Example :: Determine whether there Lines are parallel or intersected or skew.

① $L_1 : x = 2t \ , \ y = 1-3t \ , \ z = -t$

$L_2 : x = 1-4s \ , \ y = 6s \ , \ z = 5+2s$

Solution::

معاملات t

$dL_1 = \langle 2, -3, -1 \rangle$

$dL_2 = \langle -4, 6, 2 \rangle$

$\frac{s}{t} \rightarrow \frac{-4}{2} \stackrel{?}{=} \frac{6}{-3}, \frac{2}{-1}$

$-2 = -2 = -2$

$\therefore dL_2 = -2\, dL_1 \rightarrow L_1 \parallel L_2$ parallel

OR بالنظر

② $L_1 : x = 2+t \ , \ y = 3-2t \ , \ z = 1-3t$

$L_2 : x = 3+s \ , \ y = -4+3s \ , \ z = 2-7s$

(i) $\frac{s}{t} \quad \frac{1}{1} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-2} \stackrel{?}{=} \frac{-7}{-3} \rightarrow L_1$ not parallel L_2

لا يوازي

(ii) بشوف إذا متقاطعين

$x = x \rightarrow 2+t = 3+s \rightarrow ① \quad (*2)$

$y = y \rightarrow 3-2t = -4+3s \rightarrow ②$

حل المعادلات

$4+\cancel{2t} = 6+2s \rightarrow 7 = 2+5s$

$3-\cancel{2t} = -4+3s$

$5 = 5s \rightarrow \boxed{s=1}$

عوضنا في الأولى عشان أجيب قيمة t

$2+t = 3+1$

$2+t = 4$

$\boxed{t=2}$

$\rightarrow \boxed{s=1}, \boxed{t=2}$

عوضهم في معادلة الخط الأول والثاني وإذا طلع نفس قيمة (x , y , z) ← يكون إلهم نفس نقطة التقاطع فيكونوا متقاطعين.

$L_1 : x = 4 \ , \ y = -1 \ , \ z = -5$

$L_2 : x = 4 \ , \ y = -1 \ , \ z = -5$

point of intersection

$P(4, -1, -5)$

$\therefore L_1 \,\&\, L_2$ intersected

Example : Write an Eqn plane containing L_1 & L_2

L_1 : $x = 2+t$, $y = 3 - 2t$, $z = 1 - 3t$

L_2 : $x = 3+s$, $y = -4+3s$, $z = 2-7s$

بالنظر L_1 not parallel L_2

* نفس السؤال إللي قبل
طلعو مسارات متقاطعين .

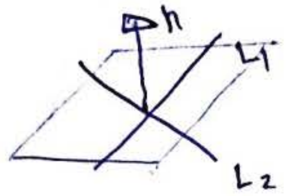
$\boxed{ii}$ $x = x \longrightarrow 2+t = 3+s$

$y = y \longrightarrow 3-2t = -4+3s$

$\boxed{t=2}$ $\boxed{s=1}$

pt of intersection $(4, -1, -5)$

* الأشي الجديد بدي أوجد معادلة plane.



* أهم شي زي ما حكينا قبل أنو لما تقاطع 2-Line رح يكون في plane بجمعهم

$dL_1 = \langle 1, -2, -3 \rangle$

$dL_2 = \langle 1, 3, -7 \rangle$

$\vec{n} = dL_1 \times dL_2 = 23i + 4j + 5k$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

عمودي على plane

π : $23(x-4) + 4(y+1) + 5(z+5) = 0$

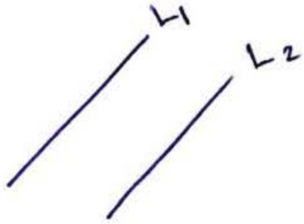
* نقطة التقاطع

أو بتقدر تجيب نقطة من L_1 أو L_2

* Distance between point & a line:

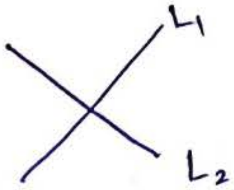
A) Parallel Line.

* في حالة توازي 2-Line يوجد مسافة بين الخطين ويكون الزاوية بينهما $0 \le \theta \le \pi$.



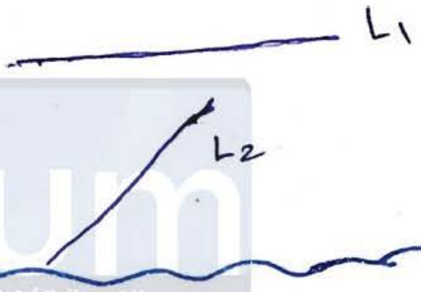
B) Intersected Line.

* في حالة تقاطع خطين (2-Line) لا يوجد مسافة بينهما ولكن يوجد زاوية بينهم.



C) Skew Line.

* في حالة تخالف 2-Line يوجد مسافة بينهم ولكن لا يوجد زاوية بينهما.



Example: Find the acute (حادة) angle between L_1 & L_2

$L_1: \; x = 2+t \;,\; y = 3-2t \;,\; z = 1-3t$

$L_2: \; x = 3+s \;,\; y = -4+3s \;,\; z = 2-7s$

* طبعاً أول خطوة بنحدد هل الخطين متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين وبعدين بنطلع الزاوية.

حلينا هاد السؤال من قبل وطلع معانا انهم متقاطعين فعشان هيك يكون في زاوية بينهم.

$d_{L_1} = \langle 1, -2, -3 \rangle$

$d_{L_2} = \langle 1, 3, -7 \rangle$

* $|d_{L_1}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

* $|d_{L_2}| = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$

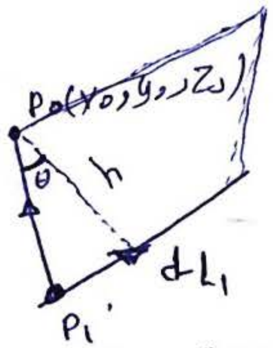
$$\cos\theta = \frac{|d_{L_1} \cdot d_{L_2}|}{|d_{L_1}|\,|d_{L_2}|} = \frac{|1-6+21|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{59}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{14 \times 59}}\right) = 56.17$$

* لازم تكون الزاوية حادة لأنو طالب هيك بالسؤال

~~Example~~: distance between pt & a line:-

* هلأ بدنا نتعلم نحسب المسافة بين خطين أو بين two planes أو بين خط و plane أو بين نقطة و plane أو بين نقطة وخط.



هاد الأشي اخذنا قبل والمفروض أنك عارفو

Area = $dL_1 \times h$

* في حالة التوازي (parallel) بين نقطة و خط أو خطين متوازيين نستخدم قانون متوازي الأضلاع،

* كل اشي راح يتوضح وراح يكون سهل بس ركزلي شوي،

$$\text{Area} = \underset{\text{قاعدة}}{dL_1} \times \underset{\text{ارتفاع}}{h}$$

والجواب بكون رقم موجب (scalar)

$$|P_1P_0 \times dL_1| = dL_1 \cdot h$$

هاد بمثل المسافة بين النقطة والخط

$$h = \frac{|P_1P_0 \times dL_1|}{dL_1}$$

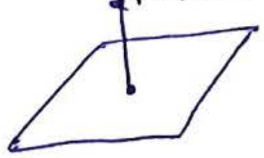
$$d(P_0, L) = \frac{|P_1P_0 \times dL_1|}{|dL_1|}$$

المسافة بين نقطة وخط

* Distance between a point & a plane :-

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ حفظ

$P_0(x_0, y_0, z_0)$



$\pi : ax + by + cz + d = 0$

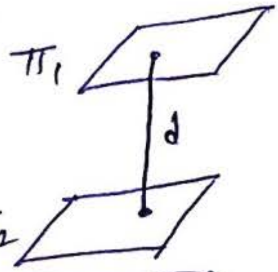
Example :- Find the distance between two the plane :-

$\pi_1 : 2x - 4y + z = 1$

$\pi_2 : -4x + 8y - 2z = 5$

لازم تكون يمين

π_1



d

π_2

بما أنو الـ two plane متوازيات بطلع المسافة زي ما كنا نطلعها لما يكون عنا خطين متوازيين بو حسب القانون.

$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = d(\pi_1, P_2)$

* خطوات الحل :

1) طلع نقطة من الـ plane① أو نقطة من π_2 وعوضها بالقانون.

$\boxed{\cancel{x}=0}$ & $\boxed{y=0}$ عوض في π_1

$\rightarrow z = 1 \rightarrow P_1(0, 0, 1) \rightarrow$ * نقطة على π_1

* كل علي أعوض في القانون.

$$d(P_1, \pi_2) = \frac{|-4x + 8y - 2z - 5|}{\sqrt{4^2+8^2+2^2}}$$

$$= \frac{|-4(0) + 8(0) - 2(1) - 5|}{\sqrt{16+64+4}} = \frac{7}{\sqrt{16+64+4}}$$

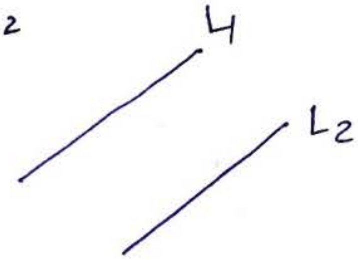
$$= \frac{7}{\sqrt{84}}$$ #

Example :- Find the distance between :-

L_1 : $x = 2t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

L_2 : $x = 1 - 2s$, $y = 2 - s$, $z = s$

معامل S / معامل t $\quad \frac{-2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \rightarrow -1 = -1 = -1 \quad L_1 \parallel L_2$



$d(L_1, L_2) = d(P_1, L_2) = d(L_1, P_2)$

بما انهم متوازيين بستخدم القانون
إلي بين نقطة و خط.

$$d(P_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times dL_2|}{|dL_2|}$$

الخطوات :-

1) بجيب نقطة من الخط الأول و الثاني
و بكون منهم Vector و بعمل
بين cross.pro
$P_1P_2 \times L_1$
$P_1P_2 \times L_2$

زي ما أخذنا قبل
اذا مركز معاي

$t = 0 \rightarrow x = 0$, $y = 1$, $z = 2$

pt on L_1 $P_1(0, 1, 2)$

$s = 0 \rightarrow x = 1$, $y = 2$, $z = 0$

$P_2(1, 2, 0)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 1, 1, -2 \rangle$

$dL_2 = \langle -2, -1, 1 \rangle$ معاملات (S)

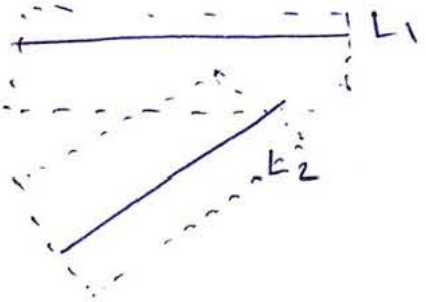
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times dL_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j + k$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 1}$$
$$= \sqrt{11}$$

$$|dL_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

طبق على القانون $\quad d(P_1, L_2) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{11}{6}}$ ##

* Distance between two Line.



L1 skew L2

$L_1 \parallel \Pi_2$ ~ مع

$L_2 \parallel \Pi_1$ ~ مع

$$d(L_1,\Pi_2) = d(L_2,\Pi_1) = d(P_1,\Pi_2) = \underbrace{d(P_2,\Pi_1)}_{\text{هاد إلي بدي}}$$

$$d(P_1,\Pi_2) = d(P_2,\Pi_1) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ أو هاد

Example: Find the distance between these two Lines.

$L_1: x = 1+t, \; y = -2+3t, \; z = 4-t$

$L_2: x = 2s, \; y = 3+s, \; z = -3+4s$

1) أول خطوة لازم أشوف وضع الخطين Inter, skew, parallel

2) بكون معادلة plane في حالة طلع الخطين skew

3) بطلع نقطه على ال plane

* هاد الاشي مهم *

بما أنو طالب في السؤال مسافة بين خطين يعني الخطين راح يكونوا أما متوازيين أو متخالفين

* في حالة التقاطع لا تكون مسافة بين الخطين.

$\frac{s}{t} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{3} = \frac{4}{-1}$ L1 not parallel L2 إذا غير متوازيين

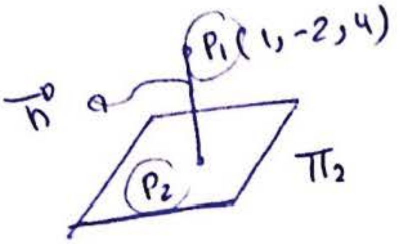
L1 not intersected L2 فراح يكونوا الخطين متخالفين

* حين عرفنا لأنو حكالنا مسافة *

$\boxed{t=0} \to L_1 \to \boxed{x=1}, \boxed{y=-2}, \boxed{z=4}$

$P_1(1,-2,4)$

* تكملة الحل خلف الصفحه *



١) طلعنا نقطة من الخط الأول.
٢) بدي أطلع معادلة plane عشان أعوض بالقانون.
٣) لازم أجيب Vector عمودي على Plane

$\vec{n} = dL_1 \times dL_2 \rightarrow$ عمودي على plane

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\vec{n} = 13i - 6j - 5k$

بدي نقطة على π_2 $\longrightarrow s = 0 \longrightarrow L_2 \longrightarrow x = 0$

$y = 3$

$z = -3$

$P_2(0, 3, -3)$

$\pi_2 : 13(x-0) - 6(y-3) - 5(z+3) = 0$

$$d(P_1, \pi_2) = \frac{|13(x-0) - 6(y-3) - 5(z+3)|}{\sqrt{13^2 + 6^2 + 5^2}}$$

عوض $P_1(1,-2,4)$

$$= \frac{|13(1-0) - 6(-2-3) - 5(4+3)|}{\sqrt{169 + 36 + 23}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{230}}$$

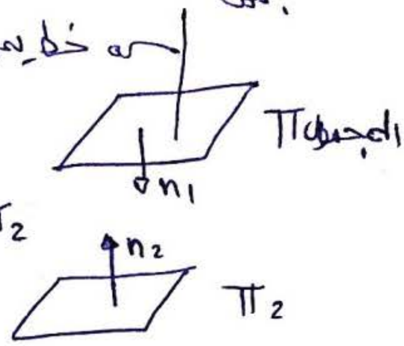
Example: Find the plane (π_1) containing the Line :- (المار)

L : $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ and

is parallel to the plane π_2 : $3x + 2y + z = 1$.

نعود على plane المجهول

أطلع على الرسمة $n_1 // n_2$



$n_2 = \langle 3, 2, 1 \rangle = n_1$

بدي نقطة على plane } $t = 0 \rightarrow L \rightarrow x = 1, y = 2, z = 4$

$P(1, 2, 4)$ نقطة على الخط هي نقطة على plane

π_1 : $5(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 4) = 0$ #

Ex:- Find the plane (π_1) containg $P_1(0, -2, 5)$, $P_2(-1, 3, 1)$

and is perpendiculer to the plane π_2 : $2z = 5x + 4y$.

Solution:

نعود على π_1

* افهم شو بدو السؤال

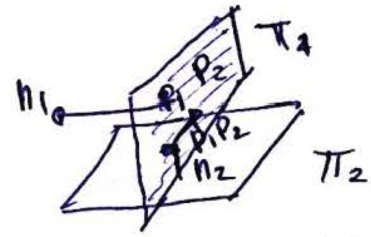
1) حكيلي بدي معادلة π_1 بتمر بالنقطتين $P_1 P_2$ وعمودي على π_2 .

$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1, 5, -4 \rangle$

$\overrightarrow{n_2} = \langle 5, 4, -2 \rangle$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{n_1} = 6i - 22j - 29k$



من الرسمة $P_1P_2 // \pi_1$

$n_2 // \pi_1$

OR

P_1 & P_2 on the plane

$P_1(0, -2, 5)$

* معادلة نقطتين باخذ واحدة منهم

π_1 : $6(x - 0) - 22(y + 2) - 29(z - 5) = 0$ #

$$n_1 = P_1P_2 \times n_2$$

Ex :- Find the point at wich the line :

$L: x = 1+2t \; , \; y = 4t \; , \; z = 2-3t$ Intersect this plane

$\pi : x + 2y - z + 1 = 0$

* بدي نقطة على الخط بحيث أنو هاد الخط بتقاطع مع π .

بمفهوم الحكي هاد أنو

$x_L = x_\pi$

$y_L = y_\pi$

$z_L = z_\pi$

$x + 2y - z + 1 = 0$

$(1+2t) + 2(4t) - (2-3t) + 1 = 0$

$\cancel{1} + 2t + 8t - 2 + 3t + \cancel{1} = 0$

$13t = 0 \rightarrow \boxed{t = 0}$

* إذا طلع قيم t= معناته بكون موجود

Line Intersect π
بتقاطع

* إذا طلع 0 = قيم

→ Line not Intersect π
لا يتقاطع

$\boxed{t = 0}$ عوضنا في معادلة الخط حتى أطلع نقطة

$x = 1 \; , \; y = 0 \; , \; z = 2$

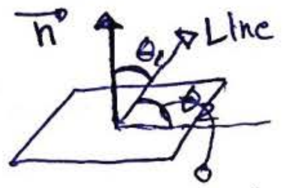
$P(1, 0, 2) \rightarrow$ نقطة تقاطع

Ex : Find the angle between L & π

لنفس السؤال إلي فوق

$$\cos\theta = \frac{d_{L_1} \cdot n}{|d_{L_1}|\,|n|}$$

بدي أحسب الزاوية



الزاوية بين L & π

$\theta_2 = 90 - \theta_1$

معاملات t

$d_{L_1} = \langle 2, 4, -3 \rangle \rightarrow |d_{L_1}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$

$n = \langle 1, 2, -1 \rangle \rightarrow |n| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

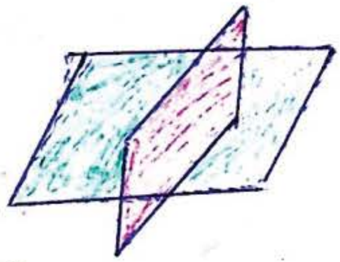
معامل x — معامل y — معامل z

$$\cos\theta = \frac{(2+8+3)}{\sqrt{23} \cdot \sqrt{6}} = \frac{13}{\sqrt{29 \times 6}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{29 \times 6}}\right)$$

* Intersected two the planes :- ∝ Z-plane تقاطع ∝

$\vec{n}_1 \perp \pi_1$ and $\vec{n}_2 \perp \pi_2$ *افهم يا غالي*



$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1$ & $\vec{n}_1 \perp \pi_1 \rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel \pi_1$

& $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \perp \vec{n}_2$ & $\vec{n}_2 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel \pi_2$

→ $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ in parallel to both π_1 & π_2

→ $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ in parallel Line of intersected of π_1 & π_2

* لو ما قدرت تفهم الحكي هاد
اشبك أصابعك ببعض.

Example : ① Find parametric Eqn for the Line of intersecting of the planes :-

② Find the angle between π_1, π_2 حله خلف الصفحة

Given : $\pi_1 : 3x - 2y + z = 1$

$\pi_2 : 2x + y = 3 + 3z$

solution

$n_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle$

$n_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$n_1 \times n_2 = \underset{d_1}{5}i + \underset{d_2}{11}j + \underset{d_3}{7}k$

ضل بدي نقطة ع Line → P_1 OR P_2 OR Point of intersected → هي نقطة ع Line.

P_1 ↓ π_1 من ; P_2 ↓ π_2 من ; Point of intersected ↓ π_1 تقاطع π_2 → أنا راح اختار هاي النقطة

$\boxed{z = 0}$ → π_1, π_2

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{x = 1} \; \boxed{y = 1}$$

Point of intersection $(1, 1, 0)$ نقطة التقاطع

↓ هاي نقطة عالخط

$$L : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 11t \\ z = 0 + 7t \end{cases}$$ #

Scanned by CamScanner

حل فرع

② $\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|n_1|\,|n_2|} = \dfrac{6-2-3}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{9+16+1}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$

Example: Find the Eqn of the Plane passes through the point $P_0(-1,2,1)$ and contains the line of intersection between

$\pi_1 : x+y-z=2$ & $\pi_2 : 2x-y+3z=1$.

2- plane تقاطع

Line of intersection $= \vec{n_1}\times\vec{n_2}$

$n_1 = \langle 1, 1, -1\rangle$

$n_2 = \langle 2, -1, 3\rangle$

$\vec{n_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2i - 5j - 3k = \vec{n_1}\times\vec{n_2}$ خط التقاطع

* ومن السؤال حكالي أنو بمر بال plane المجهول يعني بطلع عمودي عليه.

* يعني صار بدي vector عشان أعمل بينو وبين خط التقاطع cross product عشان أطلع العمودي على plane المجهول.

نقطة التقاطع: عوض $z=0 \rightarrow$

$x + \cancel{y} = 2$

$2x - \cancel{y} = 1$

$3x = 3 \rightarrow \boxed{x=1}$

$\boxed{y=1}$

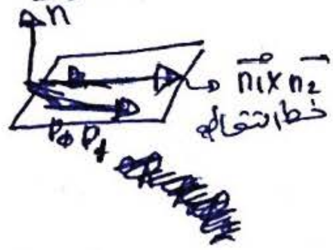
$P_1(1,1,0)$

$P_0(-1,2,1) \longrightarrow$ من السؤال

$\vec{P_0P_1} = \langle -2, 1, 1\rangle$

$\vec{n_\pi} = (\vec{n_1}\times\vec{n_2}) \times \vec{P_0P_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

المجهول



$\vec{n_\pi} = 2i - 4j + 8k$

take P_0 & $\vec{n_\pi}$ $\longrightarrow \pi : 2(x+1) - 4(y-2) + 8(z-1) = 0$

Example: Find the Eqn plane passes through the point $(1,5,1)$ and perpendiculer to both the plane.

$\pi_1 : 2x+y-2z=2$ & $\pi_2 : x+3z=4$

$\underset{\text{المجهول}}{\pi} \perp \pi_1$ & $\underset{\text{المجهول}}{\pi} \perp \pi_2$

$\rightarrow \pi \perp$ Line of intersection
$\Downarrow$
$n_1 \times n_2$

$\vec{n_1} = \langle 2, 1, -2 \rangle$

$\vec{n_2} = \langle 1, 0, 3 \rangle$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = n_{\pi\,\text{المجهول}}$

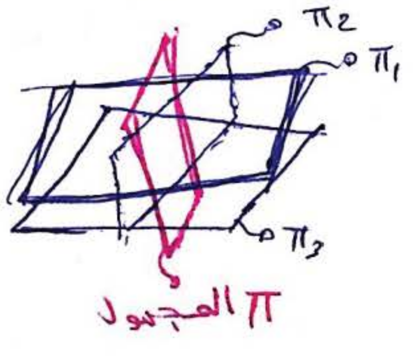
$n_\pi = \langle 3, -8, -1 \rangle$ & $P(1,5,1)$ — من السؤال

$\pi : 3(x-1) - 8(y-5) - 1(z-1) = 0$ #

Ex: write eqn of the plane passes through the line of intersection between the two plane:

$\pi_1 : x - z = 1$ & (and) $\pi_2 : y + 2z = 3$ & in perpendiculer to the plane: $\pi_3 \; x + y - 2z = 1$.

* بدك تتخيل الأربع planes.



$\vec{n_1} = \langle 1, 0, -1 \rangle$

$\vec{n_2} = \langle 0, 1, 2 \rangle$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = i - 2j + k$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{d_L}$

$\underset{\text{المجهول}}{n_\pi} = \vec{n_3} \times \vec{d_L}$

$= 3i + 3j + 3k$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

من الرسمة شو بنستنتج:

$n_3 \parallel \pi_{\text{المجهول}}$

$n_1 \times n_2 \parallel \pi_{\text{المجهول}}$

cross product → n_π المجهول

$\pi : 3(x-1) + 3(y-3) + 3(z-0) = 0$ #

* Show that the distance between the parallel planes :- $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$

$\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$

* هاي طريقة ثانية

* هاد القانون بحسب من خلاله المسافة بين two plane .

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ حفظ

هنا الحكي إنه عوّض بنفس انو ←

* الطريقة الأولى زي ما تعلمنا قبل.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(p_1, \pi_2).$$

$$d(p_1, \pi_2) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

* بتقدر تحكي هما نفس الطريقة ولازم أكون حافظ القانونين.

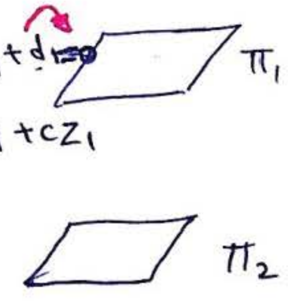
$$d(\pi_1, \pi_2) = d(p_1, \pi_2)$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\pi_1 : ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0$

$-d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$

$$= \frac{|-d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



* نفس الطريقتين بقدر احسب مسافة بين z-plane وأنا بنصح تستخدم الطريقة إلي تعلمناها قبل ولازم تكون عارف الطريقة الثانية لأني راح استخدمها في حل سؤال هوه يجوز أني استخدمه لما يكون معطيني المسافة جاهزة راح انحلو لقدام.

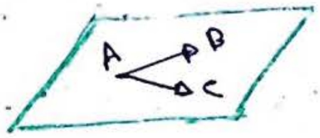
سؤال سنوات 2017

Let $A(1,2,3)$, $B(-1,3,2)$ and $C(0,4,2)$ be three points in the space R^3.

(1) Find the equation of the plane P that contains the three points A, B and C.

الحل : $\overrightarrow{AB} = \langle -2, 1, -1 \rangle$

$AC = \langle -1, 2, -1 \rangle$



$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$n_\pi = AB \times AC$

$n_\pi = \langle 1, -1, -3 \rangle$

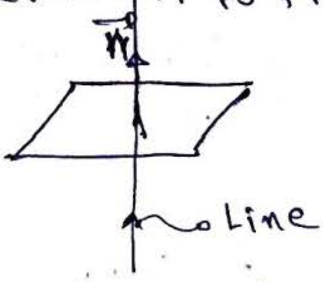
& pt A & B & C to the plane. * أي نقطة ما بتفرق *

$\rightarrow A(1,2,3)$

$\pi : 1(x-1) - (y-2) - 3(z-3) = 0$

(2) Find parametric equations for the line L that passes through the point B and perpendicular to the plane P.

$n_\pi = d_L$



$d_L = \langle 1, -1, -3 \rangle$, $B(-1, 3, 2)$

$n_\pi \parallel L$

$n_\pi = d_L$

$L : x = -1 + t$

$y = 3 - t$

$z = 2 - 3t$

3 Find apoint on the line L that makes a distance of $3\sqrt{3}$ units from the plane P.

هاد الفرع تابع للسؤال السابق.

الحل

$$d(L,\pi) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$(x-1)-(y-2)-3(z-3)=0$$

$$x-1-y+2-3z+9=0$$

$$\pi: x-y-3z+10=0$$

معادلة الplane

& $x=-1+t$, $y=3-t$, $z=2-3t$ معادلة الخط

$$3\sqrt{3} = \frac{|x-y-3z+10|}{\sqrt{11}}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{|(t-1)-(3-t)-3(2-3t)+10|}{\sqrt{11}}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{|t-1-3+t-6+9t+10|}{\sqrt{11}}$$

$$3\sqrt{11}\sqrt{3} = |11t+0|$$

يوجد حلين

1 $11t+0 = 3\sqrt{11}\sqrt{3}$ 2 $11t = -3\sqrt{3}\sqrt{11}$

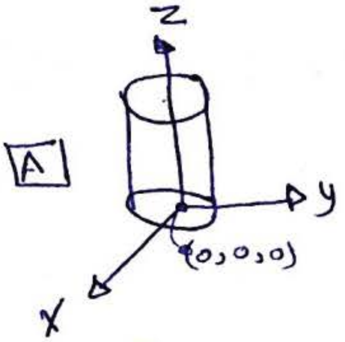
$$\boxed{t = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}} \quad \& \quad t = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

عوض بمعادلة الخط

$\rightarrow$ $x = -1+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$, $y = 3-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$, $z = 2-\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\rightarrow$ تمثل نقطة على الخط.

12.6 :- cylinder and quadric Surfaces :-

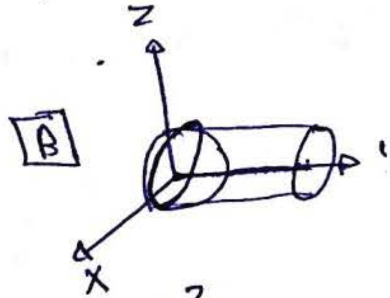
I cylinder :- (3-space)



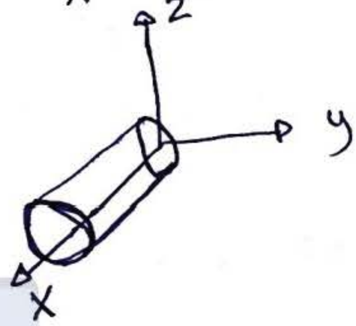
A $1x^2 + 1y^2 = 1 \rightarrow$ cylinder along Z-axis.
مع المحور المفقود

المعاملات دائماً تكون متساوية

B $x^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ cylinder along y-axis.
مع المحور المفقود



C $y^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ cylinder along x-axis.
مع المحور المفقود



* Note :- (2-space)

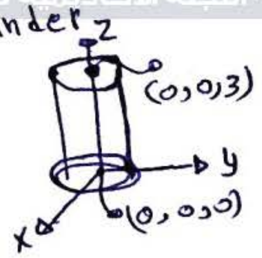
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{array}\right] \rightarrow \text{circle}$$

Example :- Identify :-

i) $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ cylinder along z-axis

* طبعاً دائماً تكون السؤال 3-space حتى لوما حكالك بالسؤال 3-space.

ii) $x^2 + y^2 = 1$ و (and) $0 \le z \le 3 \rightarrow$ cylinder

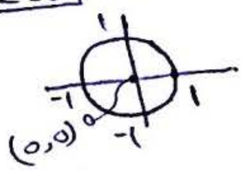


iii) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0 \rightarrow$ circle

لأنو $\boxed{z=0}$

center $(0,0)$

Radius = 1



IV $x^2 + y^2 = 1$ و (and) $z = 3$

circle in the xy-plane

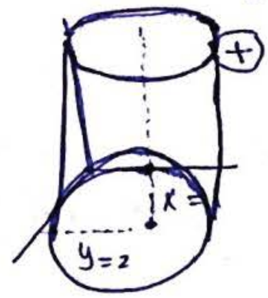
↓

* لأنو حدد لي البعد الثالث *

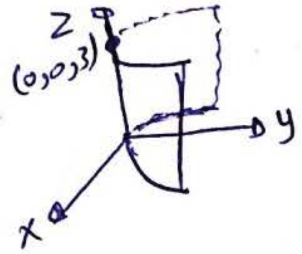
$\boxed{\text{V}}$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ → * المعاملات متساوية * / * متغيرين تربيعين * / * الإشارة بينهم $\boxed{+}$ * → cylinder

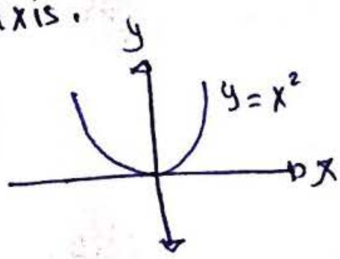
cylinder along z-axis

$c(1, 2, 0)$

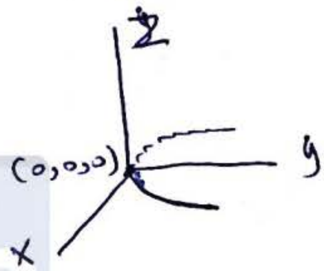


$\boxed{\text{IV}}$ $y = x^2$ → parabolic cylinder along $\cancel{x}$ z-axis.





$y = x^2,\ z = 3$



$\boxed{\text{III}}$ $z = 1 - x^2$ → cylinder along y-axis

* المحور المفقود *

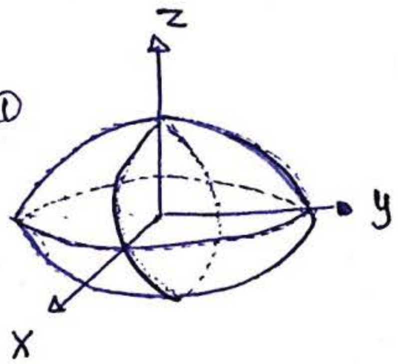
z ↓ خطي — x^2 ↓ تربيعي

* Note:-

1) دائماً متغيرين تربيعين معاملتهم $\boxed{1}$ والإشارة بينهم $\boxed{+}$ يكون عندي cylinder.

2) $z = 1 - x^2$ *حالة شاذة* وتمثل cylinder.

* Quadric Surfaces :-



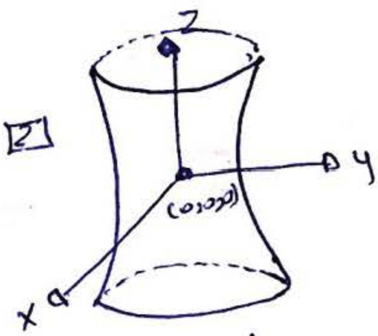
① Ellipsoial :-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

* a, b, c → (غير متساوين) Ellipsoial → مهم

* a, b, c → (متساوين) sphere → مهم

② Hyperboloid of $\underbrace{\text{one - sheet}}_{1}$:-

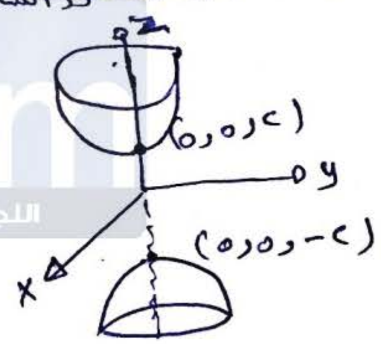


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

* عدد الإشارات السالبة α

* يرسم مع طول المحور السالب *

③ Hyperboloid of $\underbrace{\text{two - sheet}}_{1}$:-



$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* عدد الإشارات السالبة α

* نرسم الجزء العلوي $c>0$

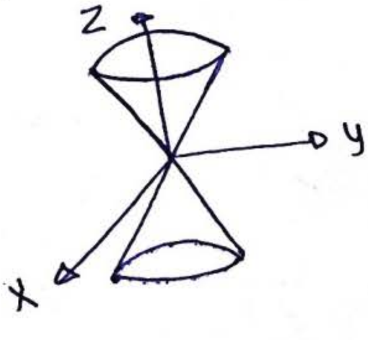
* نرسم الجزء السفلي $c<0$

* يرسم مع طول المحور الموجب *

④ Double cone :-

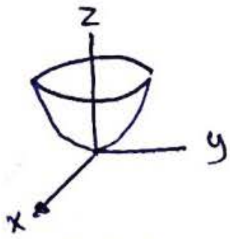
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\text{OR } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

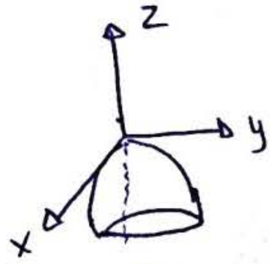


5 Paraboloid

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



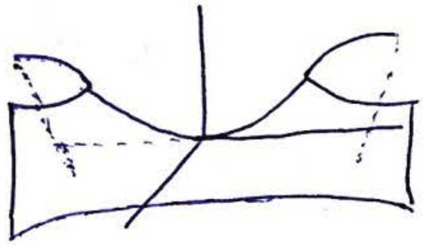
$c > 0$



$c < 0$

6 Hyperbolic Paraboloid (saddle shaped function).

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

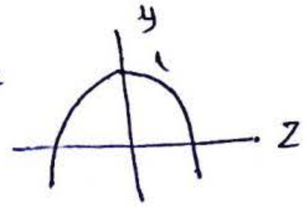


* Idetifgfy these surface :-

1) $y+z^2=1 \longrightarrow$ cylinder along x-axis

$y=1-z^2$

2-space

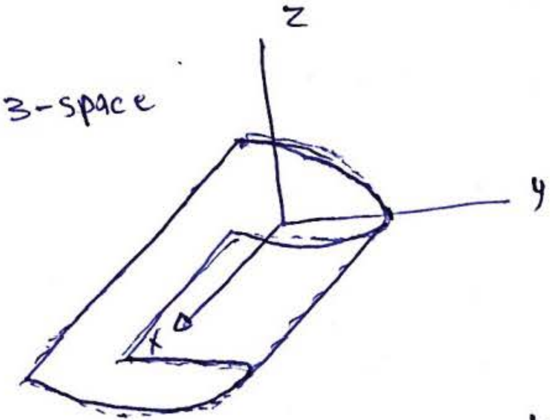


- عشان أرسم صح :

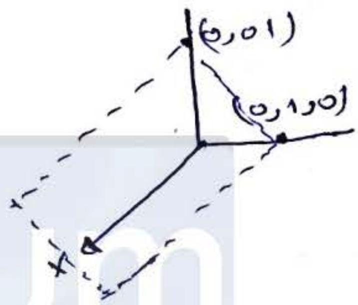
1) برسم الأختراقات 2-space

بعد هيك برسمها 2-space

3-space



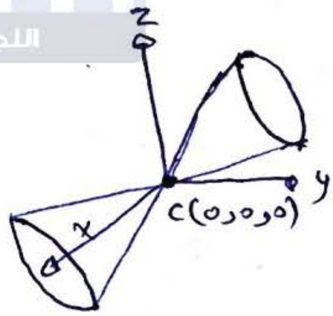
2) $y+z=1 \longrightarrow$ plane // x-axis



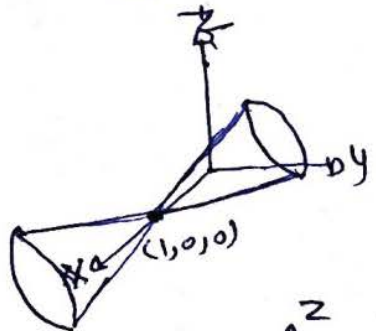
3) $x^2-y^2-z^2=0 \longrightarrow$ Double cone

وعشان الرسم بخليه كله موجب (+ve)

$x^2=y^2+z^2 \longrightarrow$ على طول المحور الموجب



4) $(x-1)^2=y^2+z^2 \longrightarrow$ Double cone

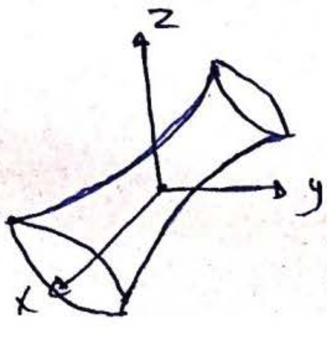


5) $x^2=y^2+z^2-1$

$-x^2+y^2+z^2=1$

$z^2+y^2-x^2=1 \longrightarrow$ Hyperboloid of one-sheet.

x على طول المحور السالب x



$\boxed{6}$ $x^2-4x+y^2=6-z^2 \longrightarrow$ مربع

solution:

$$x^2+y^2+z^2-4x=6$$

$$\underbrace{x^2-4x}_{\text{اكمال مربع}}+y^2+z^2=6$$

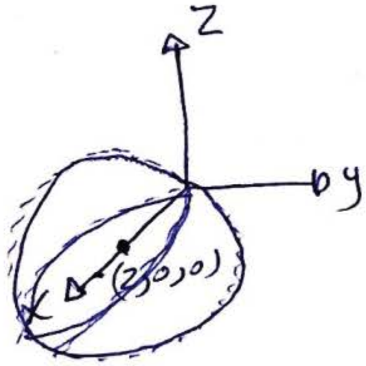
$$x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 + z^2 = 6$$

جذر — اشارة — جذر الثاني

$$(x-2)^2+y^2+z^2=10$$

المعاملات متساوية $\therefore$ sphere $\rightarrow$ centre$(2,0,0)$

$$r=\sqrt{10}$$



$\boxed{7}$ $x^2-4x-y^2=z^2-6$

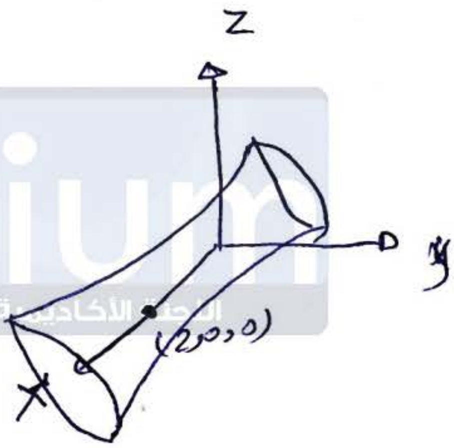
$$x^2-4x-y^2-z^2=-6$$

$$x^2-4x+2^2-2^2-y^2-z^2=-6$$

$$(x-2)^2-y^2-z^2=-6+4$$

$$(x-2)^2-y^2-z^2=-2$$

$$+z^2+y^2-(x-2)^2=2$$



المعاملات ليست متساوية $\therefore$ Hyperboloid of one-sheet

$c(2,0,0)$

8

1) Ex:- $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{9}=1 \rightarrow$ (ellipsoil)

* Find intersection with $z=2$.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{4}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=\overbrace{\left(1-\frac{4}{9}\right)}^{\text{موجب}}\underbrace{>0}_{\text{مهم}}$$

$\therefore$ ellipse curve

2) Find intersection with $z=4$.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{16}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=\overbrace{\left(1-\frac{16}{9}\right)}^{\text{سالب}}<0$$

$\therefore$ No intersection.

3) Find intersection with $z=3$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{9}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=0 \longrightarrow \text{paraboloid}$$

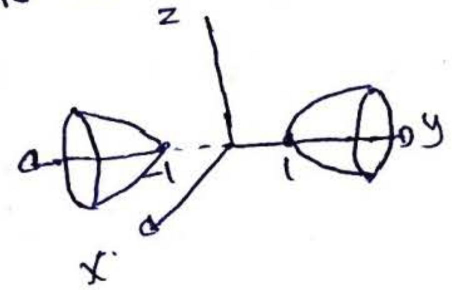
Ex:

Identify and sketch:

1) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} - \frac{z^2}{1} = 1 \rightarrow$ circular Hyperboloid of two sheets along y-axis.

أي

ح (a) متساوي

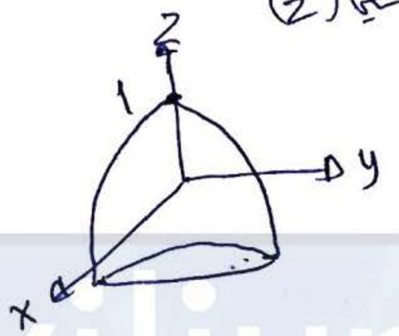


Ex: Identify and sketch:

$$z + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow z = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)$$

$\therefore$ circular paraboloid along z-axis

دائماً مع طول المحور العلوي (z)



Ex: Identify and sketch:

Ex: $4x^2 + z^2 - y - 16x - 4z + 20 = 0 \rightarrow$ سؤال (2017) سنوات

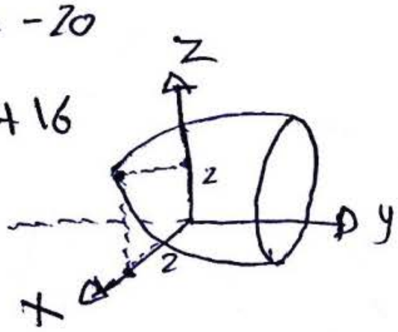
$$4x^2 - 16x + z^2 - 4z - y = -20$$

$$4(x^2 - 4x) + z^2 - 4z - y = -20$$

$$4(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + z^2 - 4z + 2^2 - 2^2 - y = -20$$

$$4(x - 2)^2 + (z - 2)^2 - y = -20 + 4 + 16$$

$$4(x-2)^2 + (z-2)^2 - y = 0$$



$$\frac{y}{4} = (x-2)^2 + \frac{(z-2)^2}{4} \Rightarrow \text{paraboloid along y-axis}$$

Ex:- sketch this Region bounded by:

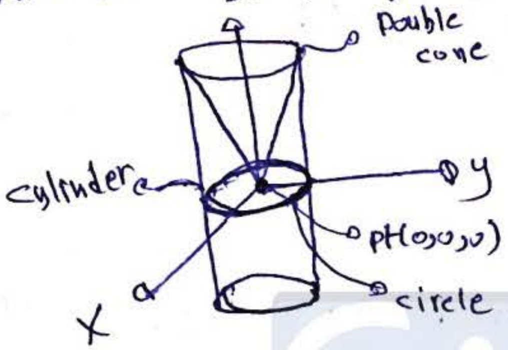
$Z=\sqrt{x^2+y^2}$ & $x^2+y^2=1$ & $0 \le Z \le 1$

$\Downarrow$ ربع الطرفين — $\downarrow$ cylinder — $Z=0$ & $Z=1$ $\downarrow$ plane // xy plane, $\downarrow$ plane // xy-plane

$Z^2 = x^2+y^2$

$Z^2-x^2-y^2=0 \rightarrow$ Double cone

* تربيع الطرف العلوي لأن الجذر موجب فقط,



$\rightarrow Z^2=x^2+y^2$

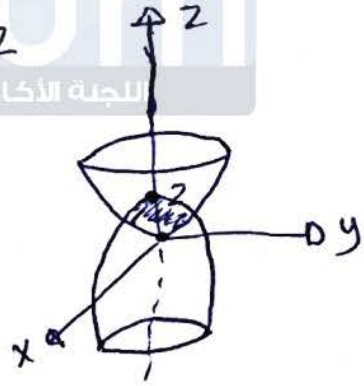
عوض $Z=0$ $\quad x^2+y^2=0 \rightarrow$ point

$\rightarrow Z^2=x^2+y^2$

عوض $Z=1$ $\quad x^2+y^2=1 \rightarrow$ circle $C(0,0)$, $r=1$

Ex:- sketch the region bounded by:

1) $Z=x^2+y^2$ & $Z+x^2+y^2=2$



$Z=x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloid

$Z=2-(x^2+y^2) \rightarrow$ Paraboloid

2) Find the curve of intersected ?

$Z=Z$

$x^2+y^2=2-x^2-y^2$

$2x^2+2y^2=2$

$x^2+y^2=1 \rightarrow$ circle $\rightarrow C(0,0)$

$R=1$

$x^2+y^2=1$

$Z+(x^2+y^2)=2$

$Z+1=2$

$\boxed{Z=1}$

plane // xy-plane

سؤال سنوات $\boxed{2017}$: Identify and sketch the surface whose equation is $4x^2+z^2-y-16x-4z+20=0$.

مهم

solution:

* طلع زي هيك سؤال حلي $\boxed{3 \text{ علامات}}$

$$4x^2+z^2-y-16x-4z+20=0$$

$$4x^2-16x-y+z^2-4z=-20$$

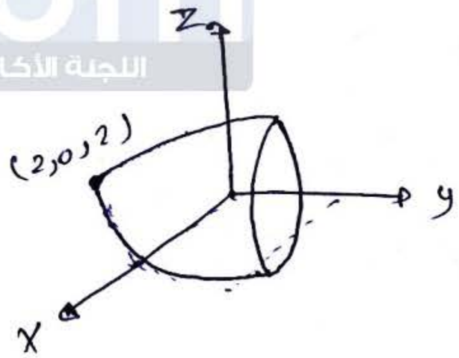
$$4(x^2-4x)-y+(z-2)^2=-20+4$$

$$4(x-2)^2-y+(z-2)^2=\cancel{-20}+\cancel{4}+\cancel{16}$$

$$(x-2)^2-\frac{y}{4}+\frac{(z-2)^2}{4}=0$$

$$\frac{y}{4}=(x-2)^2+\frac{(z-2)^2}{4}$$ ∴ Paraboloid along y-axis

c(2,0,2)



ch 3 : Vector functions & space curves :

curve

$C: \vec{r}(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$ → تمثل معادلة الـ curve بدلالة (t)

↳ [Domain $= D_x(t) \cap D_y(t) \cap D_z(t)$] $\in R$

Range = set of vectors.

Ex : $C: \vec{r}(t) = \vec{r}(t) = \underbrace{\sin(t)\,\hat{i}}_{x} + \underbrace{\cos(t)\,\hat{j}}_{y} + \underbrace{3\hat{k}}_{z}$

Parametric curve (C) : $x = \sin(t)$

$y = \cos(t)$

$z = 3$

Ex : $C : \vec{r} = \cos t\, i + \sin t\, j$, $t \in [0, 2\pi]$ ← حدود المنطقة

sketch the graph of this function.

$C:-\quad \left.\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{aligned}\right\}$ → parametric equation

* عشان ارسم الاقتران لازم أحول المعادلة الى [cartisin eqn] عشان أعرف ايش بتمثل المعادلة

→ للتخلص من معامل (t) نقوم بتربيع الطرفين

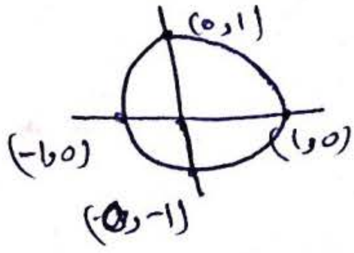
$x^2 + y^2 = \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{\text{تساوي 1}}$

$\underbrace{\boxed{x^2 + y^2 = 1}}_{\text{معادلة دائرة}}$ → cartisin eqn.

ح : للرسم

$t = 0 \to x = \cos(t) \to x = 1 \quad (1,0)$

$\to y = \sin(t) \to y = 0$

→ 

$t = \frac{\pi}{2} \to \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \to (0,1)$

خاطر المنطقة ضمن حدود المجال لأنو هيك معطيني السؤال $[0, 2\pi]$

$t = 0 \to t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi \to$

$t = \frac{3\pi}{2} \to t = 2\pi$

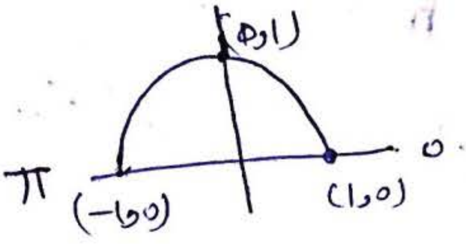
$\boxed{2}$ $\vec{r}(t) = \cos t\, \hat{i} + \sin t\, \hat{j}$, $t \in [0, \pi)$

* نفس السؤال إلي قبل بس
الفترة إلي عندي
بتختلف.

$x = \cos t$

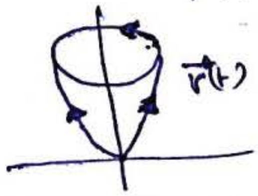
$y = \sin t$

$x^2 + y^2 = 1$



$\boxed{3}$ $\vec{r}(t) = \underbrace{\cos t\, \hat{i}}_{x} + \underbrace{\sin t\, \hat{j}}_{y} + \underbrace{3k}_{z}$, $[0, 2\pi]$

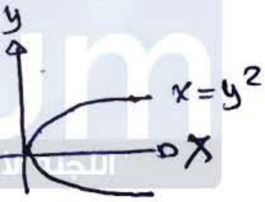
$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 , \; z = 3 \rightarrow \text{circle on plane } z = 3$$



$\boxed{4}$ $\vec{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$ Graph:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t \end{array}\right\} \quad x = y^2 \text{ parabolla}$$

x- Function of $\underline{\underline{y}}$



$\boxed{5}$ $\vec{r}(t) = \langle \sin t, 3, \cos(t) \rangle$

$x = \sin t$

$y = 3$

$z = \cos(t)$

$x^2 + y^2 + z^2 = \overbrace{\sin^2 t + 9 + \cos^2 t}^{1}$

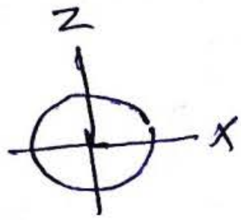
$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 9$

$x^2 + y^2 + z^2 = 10$

$y = 3 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$

$x^2 + 9 + z^2 = 10$

$x^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ circle



Ex : Find vector of parametric eqn for the line segment that Joint $P(1,-1,2)$, $Q(4,1,7)$

$\vec{PQ} = \langle \underset{d_1}{3}, \underset{d_2}{2}, \underset{d_3}{5} \rangle$, $P(1,-1,2)$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= 2 + 5t \end{aligned}\right] \rightarrow \text{parametric eqn}$$

$\Rightarrow$ vector eqn : $\vec{r}(t) = (1+3t)\hat{i} + (-1+2t)\hat{j} + (2+3t)\hat{k}$ #

Ex : At ~~that~~ what point does the curve $\vec{r}(t) = t\hat{i} + (2t - t^2)\hat{k}$, intersection the paraboloid $z = x^2 + y^2$

~~solution~~ solution :

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 2t - t^2 \end{aligned}\right] \rightarrow \begin{aligned} x &= t \\ z &= 2t - t^2 \end{aligned}$$

$z = 2x - x^2$, $z = x^2 + y^2$

$y=0$, $z = z$

$2x - x^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 2x - x^2$

$2x^2 - 2x + y^2 = 0 \longrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\underset{y=0}{\downarrow}$

$2x(x-1) = 0$

$x = 0$, $x = 1$

$x = 1 \rightarrow z = x^2 + \overset{y=0}{y^2} \rightarrow z = 1 \rightarrow \vec{r}(t) = \langle 1, 0, 1 \rangle$

$x = 0 \rightarrow z = x^2 + y^2 \rightarrow z = 0 \rightarrow \vec{r}(t) = \langle 0, 0, 0 \rangle$

** Domian**

1. Find the domian :

* $\vec{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

$D(r) = R \cap t-1 \geq 0 \cap 5-t \geq 0$

$= R \cap t \geq 1 \cap t \leq 5 = [1, 5]$

* $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t}, \sin t, \frac{2}{t^2-1} \rangle$ اصفار المقام

$D_o(r) = [0, \infty) \cap \overset{R}{(-\infty, \infty)} \cap \overset{R}{(-\infty, \infty)} - \{1, -1\}$

$= [0, \infty) - \{1\}$

* $r(t) = \langle \sqrt{4-t^2}, e^{-3t}, \ln(t+1) \rangle$

$D_o(r) = 4-t^2 \geq 0 \cap (-\infty, \infty) \cap t+1 > 0$

$4 \geq t^2 \cap (-\infty, \infty) \cap t \neq -1$

$= (-1, 2]$

** Limits **

- let $r(t) = <x(t), y(t), z(t)>$

$$\lim_{t\to t_0} r(t) <\lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t), \lim_{t\to t_0} z(t)>$$

Ex: Find $\lim_{t\to 0} <\frac{\sin t}{t}, e^{3t}, \cos t>$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{0}{0}$!!

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$
متطابقة

$\lim_{t\to 0} e^{3t} = 1$

$\lim_{t\to 0} \cos t = 1$

$= <1, 1, 1>$

Ex: Find $\lim_{t\to\infty} <te^{-t}, \frac{t^3+t}{2t^3-1}, t\sin\frac{1}{t}>$

اشتق البسط والمقام

* $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$ لوبيتال

* $\lim_{t\to\infty} \frac{t^3+t}{2t^3-1} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{2t^3}$ $\frac{\text{أعلى قوة بالبسط}}{\text{أعلى قوة بالمقام}}$ $= \frac{1}{2}$

* $\lim_{t\to\infty} t\sin\frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 1$
متطابقة

$= <0, \frac{1}{2}, 1>$

** Defferentiation Rules: قواعد الاشتقاق

$\vec{r_1}(t)$, $\vec{r_2}(t)$ → two vector Functions:-

1) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r_1}(t) \pm \vec{r_2}(t)\right) = \vec{r_1}'(t) \pm \vec{r_2}'(t)$

2) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}\right) = \vec{r_1} \cdot (\vec{r_2}') + \vec{r_1}' \cdot (\vec{r_2})$ الترتيب مهم

مشتقة جزء

3) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r_1} \times \vec{r_2}\right) = \vec{r_1}\,(\vec{r_2}') + (\vec{r_1}') \times \vec{r_2}$ الترتيب مهم

مشتقة جزء

4) $\frac{d}{dt}\left(f(t) \cdot \vec{r}(t)\right) = f(t) \cdot \vec{r}'(t) + f'(t) \cdot \vec{r}(t)$

مشتقة جزء

Ex:- $\vec{r}(t) = \cos(e^{-t})\, i + \sin(e^{-t})\, j + t^2 k$ find $\frac{d}{dt}$

① $\vec{r}'(t) = -\sin(e^{-t}) \cdot e^{-t}(-1)\, i + \cos(e^{-t}) \cdot e^{-t}(-1)\, j + 2t\, k$

② $\frac{d}{dt}\left(t^2 \cdot \vec{r}(t)\right) = t^2 \cdot \vec{r}'(t) + 2t \cdot \vec{r}(t)$

$= t^2\left(\sin(e^{-t}) \cdot e^{-t}\, i - \cos(e^{-t}) \cdot e^{-t}\, j + 2t\, k\right)$

$+ 2t\left(\cos(e^{-t})\, i + \sin(e^{-t})\, j + t^2 k\right)$.

Ex: $\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}\, i + \frac{2t}{1+t^2}\, k\right) \cdot dt$ find:

$= 4\tan^{-1}(t)\, i + \ln(1+t^2)\, k \Big]_0^1$

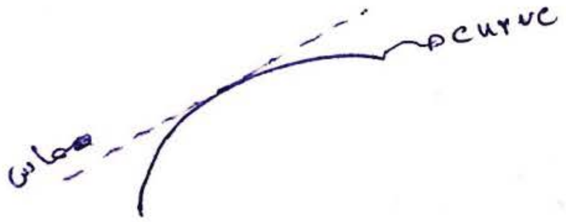
$= 4\left((\tan^{-1}(1) - \underbrace{\tan^{-1}(0)}_{0}\right) i + (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0})\, k$

$= 4\left(\frac{\pi}{4}\right) i + \ln 2\, k$

(13.2)

* Geometrical Meaning of $\vec{r}'(t)$:

$r'(t) \longrightarrow$ is the direction of the tangent Line to the curve of the vector functions $\vec{r}(t)$ at (t_0)



* خطوات إيجاد معادلة Tangent Line:

1) نشتق الـ vector بالنسبة لـ t.

2) إيجاد قيمة t من المعادلة الأصلية.

3) تعويض قيمة t في معادلة الاشتقاق

Example: write Parametric eqn for the tangent Line to the curve: $C: \vec{r}(t) = \langle 1 + 2\sqrt{t},\ t^3 - t,\ t^3 + t \rangle$ at the point $(3, 0, 2)$

① $r'(t) = \langle \frac{2}{2\sqrt{t}},\ 3t^2 - 1,\ 3t^2 + 1 \rangle$

② $P(3, 0, 2)$ ($3 \to x$, $0 \to y$, $2 \to z$)

$x = 1 + 2\sqrt{t} \longrightarrow 3 = 1 + 2\sqrt{t}$

$y = t^3 - t \longrightarrow 0 = t^3 - t$

$z = t^3 + t \longrightarrow 2 = t^3 + t$

نأخذ المعادلة الأقل حلول لإيجاد قيمة t

$3 = 1 + 2\sqrt{t} \longrightarrow 2 = 2\sqrt{t}$

$2 = 2\sqrt{t} \longrightarrow \sqrt{t}^2 = 1^2 = \boxed{t = 1}$

③ $r'(1) = \langle \frac{2}{2\sqrt{1}},\ 3(1)^2 - 1,\ 3(1)^2 + 1 \rangle$

$r'(1) = \langle \underbrace{1}_{d_1},\ \underbrace{2}_{d_2},\ \underbrace{4}_{d_3} \rangle$

$x = 3 + t$

$y = 0 + 2t$

$z = 2 + 4t$

$\Rightarrow$ Parametric eqn of the tangent Line.

Ex: writ parmetric eqn for the tangent Line to the curve C: $\vec{r}(t) = \ln(t)\,i + 2\sqrt{t}\,j + t^2\,k$ at the pt $(0, 2, 1)$

$\boxed{1}$ $r'(t) = \left\langle \frac{1}{t}, \frac{2}{2\sqrt{t}}, 2t \right\rangle$

$\boxed{2}$ $x = \ln(t) \longrightarrow 0 = \ln(t) \longrightarrow t = 1$

$y = 2\sqrt{t} \longrightarrow 2 = 2\sqrt{t} \longrightarrow t = 1$

$z = t^2 \longrightarrow 1 = t^2 \longrightarrow t = \pm 1$. أعترض $t = 1$

حل مرفوض $t = -1$ X

$r'(1) = \langle \underbrace{1}_{d_1}, \underbrace{1}_{d_2}, \underbrace{2}_{d_3} \rangle$

$x = 0 + t$

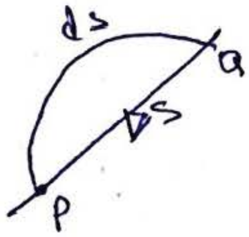
$y = 2 + t$

$z = 1 + 2t$

13.3 Arc-Length & curvature :-

c :- $\vec{r}(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$

$\Longleftrightarrow c: \; x = x(t) \;,\; y = y(t) \;,\; z = z(t)$



$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\int ds = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} \cdot dt$$

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \| r'(t) \| \cdot dt$$

arc-Length

Ex :- Find the arc Length of the curve

$c: \vec{r}(t) = \cos t\,(i) + \sin(t)\,j + \ln\cos(t)\,k \;,\; 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{-\sin t}{\cos t}\right)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} + \tan^2 t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sec t|$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \underbrace{\ln(1+0)}_{0}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) \quad \#$$

Ex: $\vec{r}(t) = i + t^2 j + t^3 k$ From $(1,0,0)$ Find the arc Length.
$x \; y \; z$

$r' = 0i + 2tj + 3t^2 k$

$x = t \to \boxed{t=1}$

$y = t^2 \to 0 = t^2$ $\boxed{t=0}$

$z = t^3 \to \boxed{t=0}$

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} \cdot dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{t^2(4+9t^2)} \cdot dt$$

$$L = \int_0^1 |t| \underbrace{\sqrt{4+9t^2}}_{\text{تعويض}} \cdot dt$$

$u = 4 + 9t^2$

$\frac{du}{dt} = 18t$

$dt = \frac{du}{18t}$

$t = 1 \to u = 13$

$t = 0 \to u = 4$

$$L = \int_4^{13} \cancel{t} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{18\cancel{t}}$$

$$L = \frac{1}{18} \int_4^{13} u^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{13}\right] = \frac{1}{18} \times \frac{2}{3} \left[(\sqrt{u})^3 \Big|_4^{13}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[(\sqrt{13})^3 - 8\right]$$

سؤال سنوات 2017: Find the Length of the curve that is given by
$\vec{r}(t) = 3t i + \sqrt{\frac{3}{2}} t^2 j + \frac{1}{3} t^3 k$ From $t=0$ to $t=1$

$r'(t) = 3i + \sqrt{\frac{3}{2}} \times 2t + t^2$

$$L = \int_0^1 \sqrt{9 + 3t^2 + t^4} \cdot dt$$

لازم أخلص من الجذر

$t^4 + 3t^2 + 9$

$(t^2+3)(t^2+3)$

$t^4 + 3t^2 + 3t^2 + 9$

$t^4 + 6t^2 + 9$

$(t^2+3)^2$

$$= \int_0^1 \sqrt{(t^2+3)^{\cancel{2}}} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 t^2 + 3 \cdot dt$$

$$\frac{t^3}{3} + 3t \Big|_0^1 = \left[\frac{1}{3} + 3\right] - [0]$$

$$= \frac{10}{3}$$ #

Ex:- Reparametries the curve c, interms of arc-Length parametric $\underline{\underline{s}}$ when $c: \vec{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, i + e^{t} j + e^{-t} k$, $t \geq 0$

$\acute{r}(t) = \sqrt{2}\, i + e^{t} j - e^{-t} k$

* المطلوب من السؤال كتابة المعادلة بتعويض $\underline{\underline{s}}$ بدل $\underline{\underline{t}}$ ،

$S = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} \cdot dt$

لازم أخلص من dt ،

* نفس خطوات حل الأسئلة إلي قبل

$S = \int_0^t \sqrt{2 + e^{2u} + e^{-2u}} \cdot du$ → أخلص من الجذر

$e^{-2u} + e^{2u} + 2$

$\Downarrow$

$(e^{-u} + e^{u})^2$

$e^{-2u} + 2\cancel{e^{-u}}\cancel{e^{u}} + e^{2u}$

$(e^{-2u} + e^{2u} + 2) = (e^{-u} + e^{u})^2$

$S = \int_0^t \sqrt{(e^{u} + e^{-u})^2} \cdot du$

$S = \int_0^t e^{u} + e^{-u} \cdot du$

$S = e^{u} - e^{-u} \Big|_0^t$

$S = e^{t} - e^{-t} - [e^{0} - e^{0}]$

$S(t) = e^{t} - e^{-t}$

$\sinh(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$ منطابقة

$\frac{S(t)}{2} = e^{t} - e^{-t} \rightsquigarrow \frac{S(t)}{2} = \sinh(t) \rightarrow t = \sinh^{-1}\left(\frac{S}{2}\right)$

عوضها في المعادلة الأصلية

$\vec{r}(S) = \sqrt{2}\, \sinh^{-1}\left(\frac{S}{2}\right) i + e^{\sinh^{-1}\left(\frac{S}{2}\right)} j + e^{-\sinh^{-1}\left(\frac{S}{2}\right)} k$

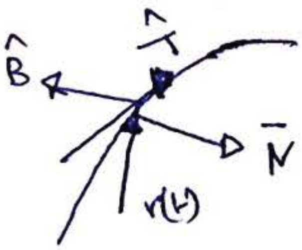
#

* There unit vector $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$

$C :- \vec{r}(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$

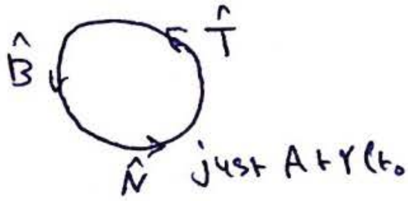
1. $\hat{T}$ = unit tangent

$$\hat{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\| r'(t) \|}$$



2. $\hat{N}$ = unit normal

$$\hat{N} = \frac{\bar{T}'}{\|\bar{T}'\|}$$



3. Binormal $\hat{B}$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

Ex :- $C : \vec{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle$ at $P(1, \frac{1}{3}, 1)$

x y z $\quad z = t$

$\boxed{t = 1}$

Find : $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$

i) $T = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$

1) $r'(t) = \langle 2t, 2t^2, 1 \rangle$

$r'(1) = \langle 2, 2, 1 \rangle \rightarrow |r'(1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$T = \frac{1}{3}\langle 2, 2, 1 \rangle = T = \langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$

ii) $N = \dfrac{T'}{\|T'\|}$

$$T' = \frac{(r(t))'}{\|r(t)\|} = \frac{\langle 2t, 2t^2, 1 \rangle}{\sqrt{4t^2 + 4t^4 + 1}} = \frac{\langle 2t, 2t^2, 1 \rangle}{\sqrt{(2t^2 + 1)^2}}$$

$$\bar{T}(t) = \underbrace{\frac{1}{2t^2 + 1}}_{b} \cdot \langle 2t, 2t^2, 1 \rangle$$

مشتقة ضرب أو مشتقة قسمة

$$T(t) = \frac{1}{2t^2+1} \cdot \langle 2t, 2t^2, 1 \rangle$$

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{2t^2+1} \langle 2, 4t, 0 \rangle + \langle 2t, 2t^2, 1 \rangle \cdot \frac{-4t}{(2t^2+1)^2}$$

$$\dot{T}(1) = \frac{1}{3} \langle 2, 4, 0 \rangle + \langle 2, 2, 1 \rangle \cdot \frac{-4}{9}$$

$$= \langle \frac{3\times 2}{3\times 3}, \frac{3\times 4}{3\times 3}, 0 \rangle + \langle -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{4}{9} \rangle$$

$$\dot{T}(1) = \langle -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \rangle$$

$$|\dot{T}(1)| = \sqrt{\frac{4}{9^2} + \frac{16}{9^2} + \frac{16}{9^2}} = \frac{1}{9}\sqrt{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\hat{N} = \frac{\langle -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \rangle}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \langle -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \rangle$$

$\boxed{2}$ $$\hat{N} = \langle -\frac{6}{18}, \frac{12}{18}, -\frac{12}{18} \rangle$$

$\boxed{3}$ $$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

$$= \frac{1}{3} \langle 2, 2, 1 \rangle \times -\frac{6}{18} \langle 1, -2, 2 \rangle$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\hat{B} = \frac{-6}{3 \times 18} \langle 6, -3, -6 \rangle$$

$$= -\frac{1}{9} \langle 6, -3, -6 \rangle$$

$$= \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$$ #

** Curvature $K(t)$:-

حفظ

* $K(t) = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\| \Rightarrow K(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{\|r'(t)\|^3}$ ~ * يستخدم لما نشوف الاقتران إذا عندي بدلالة (t)

* $K(x) = \frac{|F''(x)|}{|1 + F'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}$ ~ حفظ * يستخدم لما نشوف الاقتران إذا عندك بدلالة x, y

* لازم نحفظ القانونين منيح وأوعك تخربط بالقوة الموجودة بالمقام يا غالي.

Ex:- Find the curvature of :-

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ at $P(-1, 1, -1)$

$x = t$

$\boxed{-1 = t}$

$\cancel{r'(t)}$. $K(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{\|r'(t)\|^{3}}$

$r'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

$r'(-1) = \langle 1, -2, 3 \rangle \Rightarrow \|r'(-1)\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$r''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$

$r''(-1) = \langle 0, 2, -6 \rangle$

$r'(t) \times r''(t) = \langle 6, 6, 2 \rangle$

$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{36+36+4} = \sqrt{76}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$K(t) = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3}$

Ex :- Find curvature for $y = x^2$ at 1) $P_1(0,0)$
$P_2(-1,1)$

* $K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}$ → تنساهاش يا غالي

1) $P(0,0)$

$f'(x) = 2x \Big|_{(0,0)} = 0$

$f''(x) = 2 \Big|_{x=0} = 2$

→ $K(x) = \dfrac{2}{|1+0^2|^{\frac{3}{2}}} = 2$

2) $P_2(-1,1)$

$f'(-1) = -2$

$f''(-1) = 2$

→ $K(x) = \dfrac{2}{|1+(-2)^2|^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{(\sqrt{5})^3}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$

Ex :- Find the curvature $x^2 + y^2 = 4$ at $(2,0)$.

هادالسؤال لازم تحوله بدلالة t زي ما قلنا قبل
ليش لانو عندك الاقتران x و y
فأنا ما بعرف راح أشتق بدلالة y أو x ،

* $x^2 + y^2 = 4$

* $x = r\cos t$
* $y = r\sin t$

→ المفروض أكون حافظه

$x = 2\cos t \rightarrow 2 = 2\cos t \rightarrow \cos t = 1 \rightarrow \boxed{t=0}$

$y = 2\sin t \rightarrow 0 = 2\sin t \rightarrow \sin t = 0 \rightarrow \boxed{t=0}$

→ نفس القيمة

$\vec{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 0 \rangle$

$r'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle$

$r'(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle \rightarrow |r'(0)| = \sqrt{0+4+0} = 2$

$r''(t) = \langle -2\cos t, -2\sin t, 0 \rangle$

$r''(0) = \langle -2, 0, 0 \rangle$

$K = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

$= \dfrac{1}{2}$ #

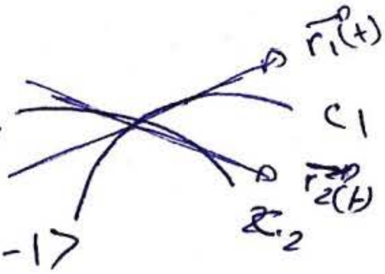
كمل الحل يا غالي

Ex :- $C_1 : \vec{r_1}(t) = \langle t^2, t, 3t^3 \rangle$

$C_2 : \vec{r_2}(t) = \langle t-1, \frac{1}{4}t^2, -t \rangle$ $\Big\} \rightarrow \boxed{t=1}$

two curves intersect at the pt $(1, 1, 3)$

find the angle of intersection.



$r_1'(t) = \langle 2t, 1, 9t \rangle \Big|_{t=1} \langle 2, 1, 9 \rangle$

$r_2'(t) = \langle 1, \frac{1}{2}t, -1 \rangle \Big|_{t=1} = \langle 1, \frac{1}{2}, -1 \rangle$

* لازم أكون 2-vec

فلازم أشتق وبعدين

اشتغل على قانون cosin

$$\cos\theta = \frac{r_1'(t) \cdot r_2'(t)}{|r_1'(t)|\,|r_2'(t)|}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{2} - 9}{\sqrt{4+1+81} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{6}{\sqrt{86}\,\sqrt{3}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{86 \times 3}}\right)$$

---

* find the curvature of the cure $y = \ln x$, $x > 0$.

* سؤال سنوات *

2017

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$y' = \frac{1}{x}$

$y'' = \frac{-1}{x^2}$ $\Big\} \rightarrow$ $k(x) = \dfrac{\left|\frac{-1}{x^2}\right|}{\left|1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)^3} \quad \#$$

Ch 14 :- Partial Derivatives

14.1 function of several variables :-

1. Functions of 1-variable

$y = f(x) \rightarrow D_f \subseteq R$

$R_f \subseteq R$

$\rightarrow$ the graph is [curve]

2. Functions of 2-variable.

$z = f(x,y) \rightarrow D_f \subseteq R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\}$

$D_f \equiv$ region $\subseteq$ x-y plane.

$R_f \subseteq R$

$\rightarrow$ the graph is [surface]

3. Functions of 3-variables :-

$w = f(x,y,z) \rightarrow D_f \subseteq R^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in R\}$

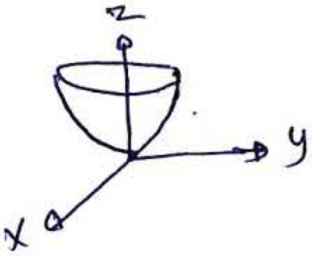
$R_f \subseteq R$

* No graph *

	Domian	Range	graph
1-variable	R	R فترة	curve
2-variable	R^2	R فترة	surface منطقة
3-variable	R^3	R فترة	No graph

* الجدول تلخيص لكل الحكي إلي مكتوب فوق و ضروري أنك تعرفه.

Ex:- $Z = x^2 + y^2$



$D_F = R^2$

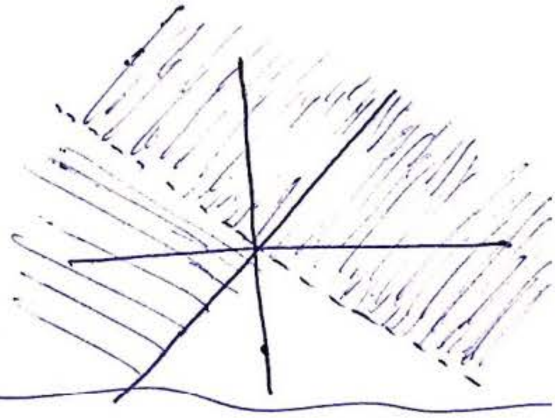
فترة

$R_F = [0, \infty)$ Interval

graph $\longrightarrow$ Surface

Ex:- Find the domian & sketch the domian of the function.

1) $f(x, y) = \sqrt{y - x} \cdot \ln(y + x)$



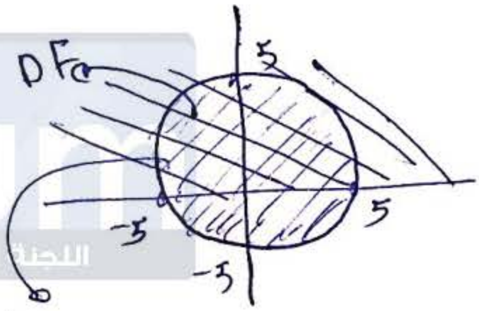
$y - x \geq 0$ & $y + x > 0$

$y \geq x$ & $y > -x$

$\boxed{y = x}$ $\boxed{y = -x}$

منقط

Ex: ② $F(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \sqrt{y}$



$25 - x^2 - y^2 \geq 0$ $y \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq 25$ $y = 0$

$x^2 + y^2 = 25$

circle $(0,0)$

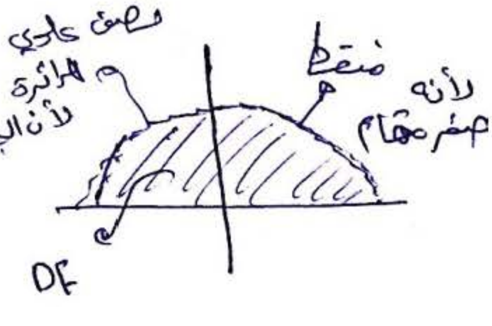
$r = 5$

النصف العلوي للدائرة لأن الجذر (+ve)

3) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

$y \geq 0$ & $25 - x^2 - y^2 \geq 0$

$y = 0$ & $x^2 + y^2 \leq 5$ (+ve)



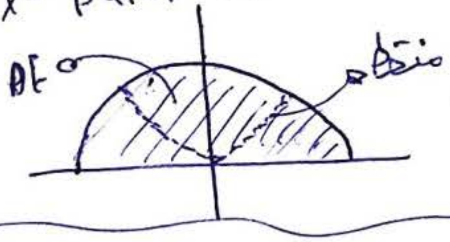
* Find and sketch the domian of :

① $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y-x^2}$

2-variable

$4-x^2-y^2 \geq 0$ and $y-x^2 \neq 0$ صفر مقام

$x^2+y^2 \leq 4$ circle $\quad y=x^2$ parapolla



$DF = \{(x,y): \; x^2+y^2 \leq 4 \;\&\; y-x^2 \neq 0\}$

---

[2] $F(x,y,t) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x}$

3-variable

$4-x^2-y^2 \geq 0 \;\&\; x \neq 0$

لأنه

cylinder $\leftarrow x^2+y^2 \leq 4 \;\&\; x \neq 0$

* لا يوجد رسمة

* للاقتران لأنه 3-variable

$DF: \{(x,y,t): \; x^2+y^2 \leq 4 \;\&\; x \neq 0\}$

Ex :- graph the Function :

$f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$

$Z = \sqrt{16-x^2-y^2}$

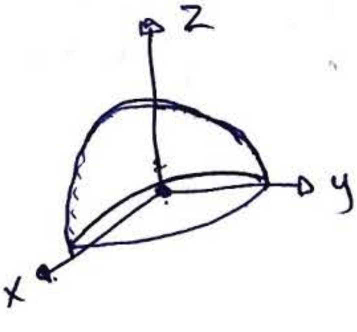
$Z^2 = 16-x^2-y^2$

$x^2+y^2+Z^2 = 16 \rightarrow$ sphere $c(0,0,0)$ $\boxed{r=4}$

* بدي أرسم الاقتران

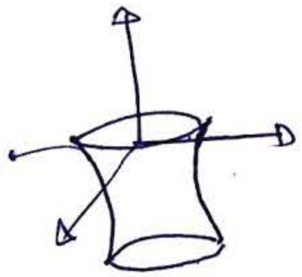
1) حط بدل $F(x,y)=Z$

2) ربع الطرفين.



النصف العلوي للكرة لأن الجذر موجب.

② $z = -\sqrt{x^2+y^2-4}$



النصف السفلي لأن الجذر سالب

$z^2 = x^2+y^2-4$

$z^2 = x^2+y^2-4$

$z^2 - x^2 - y^2 = -4$

$x^2+y^2-z^2 = 4 \rightarrow$ Hyperboloid of one-sheet

$c(0,0,0)$

---

k-level curves & surface:

① functions of two-variable

$z = f(x,y) \rightarrow$ (دفع)

Let $z = k \in R_f$

$\boxed{k = f(x,y)} \rightarrow$ k-level curve

② functions of 3-variable

$w = f(x,y,z) \leftarrow$ No graph

$\boxed{k = f(x,y,z)} \rightarrow$ k-level surface.

Ex: $z = x^2+y^2$

$D_f \rightarrow R^2$

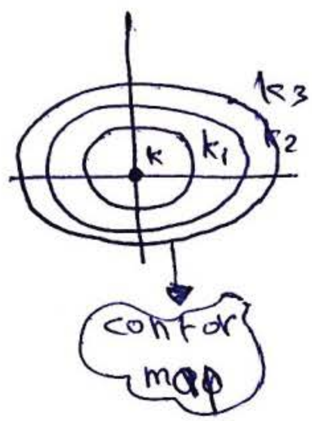
$R_f \rightarrow [0,\infty)$

k-level curve $\rightarrow \boxed{k = x^2+y^2}$

$0 = k = x^2+y^2 = 0$ pt$(0,0)$

$k=1 \rightarrow x^2+y^2=1$ circle

$k=2 \rightarrow x^2+y^2=2$ circle



Ex: ① $w = x + 3y + 5z$ Describe the level curve.

$k = x + 3y + 5z$

$k=0 \rightarrow x + 3y + 5z = 0$ plane

$k=1 \rightarrow x + 3y + 5z = 1$

$k=2 \rightarrow x + 3y + 5z = 2$

$\Big\} \rightarrow$ k-level surface set of parallel planes

Ex: ② $f(x, y) = x - y$

Solution: $z = x - y$

$\boxed{k = x - y} \rightarrow$ k - level curve

$k=0 \rightarrow x - y = 0$

$k=1 \rightarrow x - y = 1$

$k=2 \rightarrow x - y = 2$

$\Big\} \rightarrow$ set of parallel lines

③ $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ Describe the level curve.

$z^2 = 25 - x^2 - y^2$

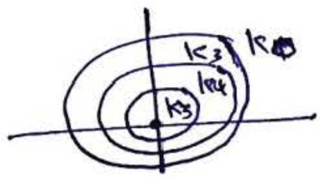
$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + k^2 = 25$

$x^2 + y^2 = (25 - k^2) \geq 0 \Big\} \rightarrow$ k-Level curve circle

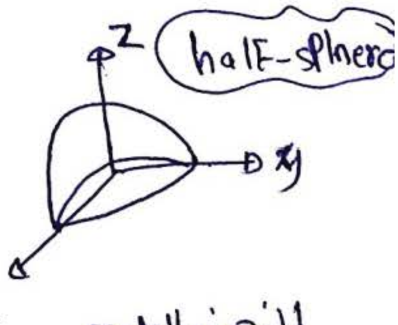
$k=0 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

$k=1 \rightarrow x^2 + y^2 = 24$

$\Big\}$ circle



$\Rightarrow$



النصف العلوي للكرة لأن الجذر (+ve)

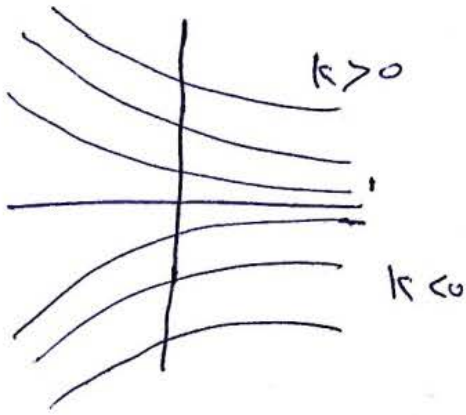
* Draw a contour map of the Surface.

$f(x, y) = y e^{x}$

$k = y e^{x}$.

$y = \frac{k}{e^{x}} \to y = k e^{-x}$

$\left.\begin{array}{l} k = 0 \to y = 0 \\ k = 1 \to y = e^{-x} \\ k = 2 \to y = 2e^{-x} \end{array}\right\} \to$ $y = k e^{-x}$ k-level curve



* Draw a contour map of the function:-

$f(x, y) = y - \ln(x)$?

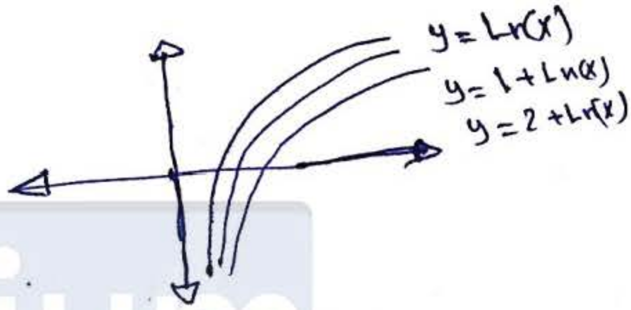
$k = y - \ln(x)$

$y = k + \ln(x)$

$k = 0 \to y = \ln(x)$

$k = 1 \to y = 1 + \ln(x)$

$k = 2 \to y = 2 + \ln(x)$



14.2 :- Limit & continuity.

* one variable :-

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ → exist موجودة / → doesn't exist غير موجودة

* two-variable :-

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ → for all paths Leading to (x_0,y_0) ⟹ same Limit $= L$

* لازم كل المسارات المؤدية إلى النقطة لازم تعطي نفس الجواب (L)

⟹ But → to show that limit (doesn't) exist, take two different path to get two differen answer.

* سيبك من هالكلام الغامض وراح تفهمو من خلال الأمثلة

Ex :- Evaluate that limit if exist :-

خطوات حل النهاية $\frac{0}{0}$
1) تعويض :
2) خلي درجة البسط = درجة المقام.
3) خذ مسارات. → من النقطة نفسها

[1] $\lim_{(x,y) \to (1,-2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2}$.

$\lim_{(x,y) \to (1,-2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}} = -3$ exist

[2] $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{y^4}{(x^4+3y^4)} = \dfrac{0}{0}$!! (problem)

1) تعويض
2) درجة البسط = درجة المقام
3) خذ مسارات

i) along $\boxed{y=0}$ → مسار أول

$\lim_{x \to 0} \dfrac{0}{x^4+0} = 0$

ii) along $\boxed{x=0}$

$\lim_{y \to 0} \dfrac{y^4}{0+3y^4} = \dfrac{y^4}{3y^4} = \dfrac{1}{3}$

→ doesn't exist

two diffrent path, give two different Limit, so the Limit doesn't exist

هاي العبارة ضروري أنك تكتبها عليها علامة

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x,y \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$ I.I. (problem)

1) تعويض x

2) خلي درجة البسط = درجة المقام

3) خذ مسارات

i) along path $y = x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

ii) along path $y = 2x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2+4x^2} = \dfrac{2x^2}{3x^2} = \dfrac{2}{5}$

→ doesn't exist

* ولازم تكتب العبارة *

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x,y \to (0,0)} \dfrac{\sqrt{x}\,y}{x+y^2} = \dfrac{0}{0}$ problem

i) along $y = \sqrt{x}$ ⟶ مسار أول

$\lim\limits_{(x,y) \to 0} \dfrac{x}{x+x} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

ii) along $y = 2\sqrt{x}$ ⟶ مسار ثاني

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+4x} = \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{3}$

→ doesn't exist

* أكتب العبارة *
إلا حتكون غلط

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \dfrac{0}{0}$

بالمرافق التربيعي

$\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \times \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\cancel{(x^2+y^2)}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\cancel{x^2+y^2}+\cancel{1}-\cancel{1}} = 2$

Ex:- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+\sin^2(y)}{2x^2+y^2} = \frac{0}{0}$ (problem)

* البسط من مكونات المقام *
معناتو أكيد النهاية ليست
موجودة ،
إذاً لازم أخذ مسارات

i) along $y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+0}{2x^2+0} = \dfrac{1}{2}$

doesn't exist

ii) along $x=0$

* واكتب العبارة *

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0+\sin^2 y}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2 = 1$

Ex: ① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin(xy)}{y} = \frac{0}{0}$!! → ضرب البسط والمقام x

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \dfrac{\sin xy}{xy} = x^2 \cdot 1 = 0\cdot 1 = 0$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} x\dfrac{\sin xy}{y} = \frac{0}{0}$!!

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} x^2 \dfrac{\sin xy}{xy} = x^2\cdot 1 = 4$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} x\dfrac{\sin xy}{y} = \sin 4$

Ex:- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}\,\sin(\infty)$

$= \boxed{0 \cdot \text{doesn't exist}}$!! there is problem.

But $\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ → is Bounded

$-1 \le \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \le 1$ مدى اقتران sin OR cos Range $[-1,1]$

$-xy \le \sin\dfrac{1}{x^2+y} \le xy$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -xy = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ so $\lim xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

Theorm: any result of limit → final result zero

$$0 \cdot \begin{pmatrix} \text{Bounded} \\ \text{function} \\ \text{sin/cos} \end{pmatrix} = 0$$

Ex: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ → البسط من مكونات المقام زي ماحكينا أحيد

* ليست موجودة *
وتكون bounded

① حل

i) along $y = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

ii) along $y = 2x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+4x^2} = \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}$$

→ doesn't exist

② حل

$$\frac{0}{x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2+y^2}$$

مدى الاقتران

doesn't exist

Ex: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$

الحل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

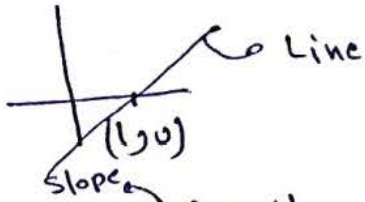
$0 \cdot$ bd

since $\lim\limits_{y=0} y = 0$

& $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ bounded

$$0 \le \frac{y^2}{x^2+y} \le 1$$

* $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{0}{0}$$



$y - 0 = m(x-1)$

$y = m(x-1)$

$m = 1 \to y = (x-1)$

$m = 2 \to y = 2(x-1)$

حل ①

i) along $y = x-1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

ii) along $y = 2(x-1)$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+4(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2}{5(x-1)^2} = \frac{2}{5}$$

doesn't exsit

* واعتبر العبارة ∝

حل ②

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

i) along $y = m(x-1)$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{m(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2} = \frac{m\cancel{(x-1)^2}}{(1+m^2)\cancel{(x-1)^2}} = \frac{m}{1+m^2}$$

doesn't exist

إذا طلع جواب Limit
بدلالة m فتكون
النهاية doesn't exist

Ex: $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \frac{0}{0}$$

i) along $x = 1$

$$\lim_{y\to 1} \frac{1-y^4}{\cancel{1-y^4}} = 1$$

ii) along $y = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}$$

doesn't exist

Ex:- $\lim \dfrac{x^2}{2x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$!! $\rightarrow$ من نفس الدرجة ← أكيد ليست موجودة

↳ أخذ مسارات

i) along $x=0$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{0+y^2} = 0$

ii) along $y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2+0} = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ doesn't exist

* اكتب العبارة * يا خالي

Ex:- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot e^y \cdot y}{x^4+4y^2} = \dfrac{0}{0}$

i) along $y=x^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 e^{x^2} \cdot x^2}{x^4+4x^4} = \dfrac{x^4 e^{x^2}}{5x^4} = \dfrac{1}{5}$

ii) along $y=2x^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 e^{2x^2} \cdot 2x^2}{x^4+4(4x^4)} = \dfrac{2\cancel{x^4} e^{2x^2}}{17\cancel{x^4}} = \dfrac{2}{17}$

$\rightarrow$ doesn't exist

since tow diff path $\rightarrow$ two diff answer $\rightarrow$ doesn't exist.

Ex:- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot \sin y^2}{x^2+2y^2} = \dfrac{0}{0}$

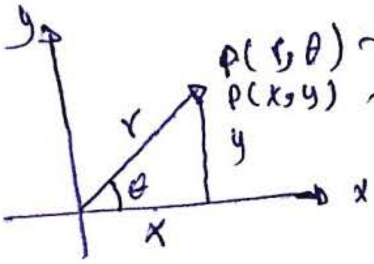
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y^2}{x^2+2y^2}$

$\dfrac{x^2}{x^2+2y^2} \cdot \sin y^2$ since $\lim\limits_{y\to 0} \sin y^2 = 0$

bd $\cdot$ 0 & $\dfrac{x^2}{x^2+2y^2}$ bounded.

$0 \le \dfrac{x^2}{x^2+2y^2} \le 1$

* Polar coordinate system :-



P(r,θ) → إحداثيات النقطة بال Polar

P(x,y) → cartisian "

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ → من المثلث

$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$ → فيثاغورس

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Ex : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$!!   * حلنا قبل * بال cartisian

$\lim\limits_{(r,\theta)\to(0,0)} \dfrac{r^3\sin^3\theta}{r^2}$ ◁—— حلها بال polar

$\lim\limits_{(r,\theta)\to(0,\theta)} r\sin^3\theta = 0 \cdot \sin^3\theta = 0$

$\quad 0 \cdot bd$

Ex: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,Ln(x^2+y^2) = 0 \cdot \infty$!!

Polar $\lim\limits_{(r,\theta)\to(0,\theta)} r^2 \,Ln\, r^2 = \lim\limits_{r\to 0} 2r^2 \,Ln\, r$

$= 2\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{Ln\, r}{\frac{1}{r^2}} = \dfrac{\frac{1}{r}}{\frac{-2r}{r^4}} = \dfrac{1}{\cancel{r}} \times \dfrac{r^4}{-2\cancel{r}} = \dfrac{r^2}{-2}$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\cancel{2}r^2}{\cancel{-2}} = 0$ *

* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y^3}{2x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 , & (x,y) \end{cases}$ Is cont at $(0,0)$??

* مطلوب من السؤال
أنك تشوفه إذا متصل ولا

$F(x) = \lim_{(x,y)} F(x)$

النهاية = الصورة

* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^3}{2x^2+y^2} = \frac{0}{0}$!!

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^3 \dfrac{x^2}{2x^2+y^2}$

$0 \cdot bd$ since $\lim_{y\to 0} y^3 = 0$

& $\dfrac{x^2}{2x^2+y^2}$ bounded ـه So the Lim doesn't exits

$f(0,0) \neq \lim \longrightarrow$ not countinous
غير متصل

14.3 :- Partial Derivative :-

1 1- Variable

* $y = F(x)$

→ المشتقة $y' = F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$

2 2- Variable :-

$Z = F(x, y)$

نقوم بتثبيت متغير ونعتبره ثابت ونشتق بالنسبة للمتغير الآخر.

اشتق → $F_x = \frac{df}{dx}$ → يعني المشتقة بالنسبة لـ (x)

OR $F_y = \frac{df}{dy}$ → يعني المشتقة بالنسبة لـ (y)

* من خلال الأمثلة راح يتوضح كل شي.

Ex: Find $\frac{df}{dx} = ??$, $\frac{df}{dy} = ??$

$F(x, y) = xy^2 + ye^{xy} + y\sin(2x^2+y) + \tan^{-1}(x+y^2) + y^3 + x^2$.

solution:-

1) $\frac{df}{dx} = y^2 + ye^{xy} \cdot y + y\cos(2x^2+y)(4x) + \frac{1}{1+(x+y^2)^2} \cdot (1) + 0 + 2x$

مشتقة الزاوية

2) $\frac{df}{dy} = 2xy + \underbrace{ye^{xy} \cdot x + e^{xy} \cdot (1)}_{\text{مشتقة ضرب}} + [y\cos(2x^2+y) \cdot (1) +$

$\sin(2x^2+y) \cdot (1)] + \frac{1}{1+(x+y^2)} \cdot (2y) + 3y^2 + 0$

Higher Derivative:-

$Z = F(x, y)$

$\rightarrow \frac{dF}{dx} = F_x$

$\frac{d^2 F}{dx^2} = F_{xx}$

الأول

$\rightarrow \frac{df}{dy\,dx} = F_{xy}$

$\frac{df}{dx\,dy} = F_{yx}$

$\rightarrow \frac{d^2 f}{dy^2} = F_{yy}$

$\rightarrow$ 2nd mixed Partial Derivative

Example:- $F(x, y) = x^3 y^5 + 2x^4 y$. find [1] F_x [2] F_{xx} [3] F_y [4] F_{yy} [5] F_{xy}

[1] $F_x = 3x^2 \underbrace{y^5}_{\text{ثابت}} + 8yx^3$

[2] $F_{xx} = 6xy^5 + 24yx^2$

[3] $F_y = 5x^3y^4 + 2x^4$

[4] $F_{yy} = 20x^3y^3 + 0$

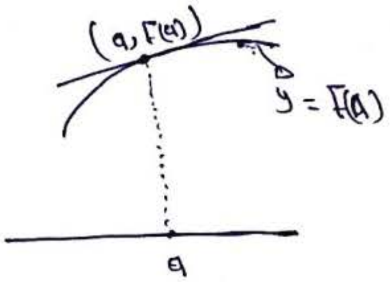
[5] $F_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3$

ارجع لهاي عشان اشتق بالنسبة لـ (y)

هاي اشتقنا

14.4 :- Tangent Plane & Linear approximation :-

1 1- Variable :-

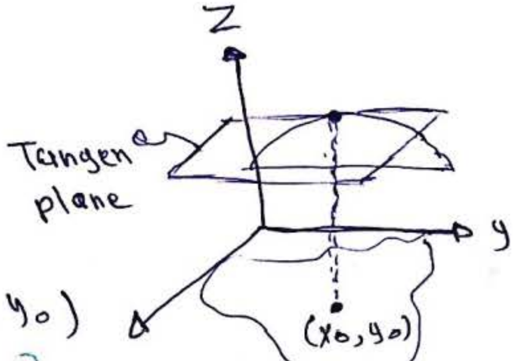


Tangen line: $y - F(a) = \underbrace{F'(a)}_{\text{الميل}}(x-a)$

$TL: y = F(a) + F'(a)(x-a)$

2 2- variable :-

$Z = F(x,y)$. surface



Eqn of the Tangent plane :-

$Z_T = F(x_0, y_0) + F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0)$ مهم (احفظ)

OR z_0

$Z = Z_0 + F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0)$

$(Z - Z_0) = F_x \Delta x + F_y \Delta y$ مهم (احفظ)

Linear approximation :-

$F(x,y) \cong Z_{T\,plane}$

$F(x,y) \cong F(x_0, y_0) + F_x \Delta x + F_y \Delta y$

$F(x,y) \cong \underbrace{L(x,y)}$

تمثل معادلة T.P

من جهة اللمس

* $L(x,y) = F(x_0, y_0) + F_x \Delta x + F_y \Delta y$ مهم (احفظ)

Ex: $U = x \cdot \sin(x + 2y)$. Find: U_x, U_{xy}, U_y, U_{yx}

* $U_x = \underbrace{x \cdot \cos(x+2y)(1) + \sin(x+2y)(1)}_{\text{مشتقة ضرب}}$

* $U_{xy} = -x \sin(x+2y)(2) + \cos(x+2y)(2)$

* $U_y = 2x \cos(x+2y)$

* $U_{yx} = \underbrace{-2x}_{\text{أول}} \underbrace{\sin(x+2y)}_{\text{ثاني}}(1) + \underbrace{2}_{\text{أول}} \underbrace{\cos(x+2y)}_{\text{ثاني}}$

مشتقة الزاوية بالنسبة (X)

Ex: $F(x,y,z) = \cos(4x + 3y + 2z)$. Find:

1. F_x
2. F_{xy}
3. F_{xyz}
4. F_y
5. F_{yz}
6. F_{yzz}

1. $F_x = -4 \sin(4x + 3y + 2z)$

2. $F_{xy} = -12 \cos(4x + 3y + 2z)$

3. $F_{xyz} = 24 \sin(4x + 3y + 2z)$

4. $F_y = -3 \sin(4x + 3y + 2z)$

5. $F_{yz} = -6 \cos(4x + 3y + 2z)$

6. $F_{yzz} = +12 \sin(4x + 3y + 2z)$

* خطوات حل سؤال Tangen plane :

1) لازم أكون حافظ المعادلة هاي ←

Tp :-

$$Z_T = f(x_0, y_0) + F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0)$$

OR Z_0

نقطة ال T.p

2) بشتق بالنسبة لـ x ← F_x

لـ y ← F_y

3) $F(x_0, y_0)$ OR Z_0 ← بعوض x و y في المعادلة الأصلية.

Ex:- Write an eqn of tangent plane:

$Z = x e^{xy}$ at $(2, 0)$.

solution:

1) $F_x = x e^{xy} \cdot y + e^{xy}(1) \Big|_{(2,0)} = 1$

2) $F_y = x e^{xy} \cdot x \Big|_{(2,0)} = 4$

3) عوض $(2,0)$ في المعادلة

$Z = (2) e^{(0)(2)} \rightarrow \boxed{Z = 2}$

Tp :- $Z_T = 2 + 1(x - 2) + 4(y - 0) = 0$ ##

ii) Find the normal to the plane. لنفس السؤال

* $\vec{n} = i + 4j - k$ → عمودي على * Tangent plane

Ex: Find an eqn of Tangent plane:

$$Z = 4x^2 - y^2 + 2y \quad \text{at } (-1, 2, 4).$$

$\boxed{Z_0 = 4}$ ممكن ما يعطيك إياها

الحل:

$$F_x = 8x \Big|_{(-1,2,4)} = -8$$

$$F_y = -2y + 2 \Big|_{(-1,2,4)} = -2(2) + (2) = -2$$

$$TP: \; Z_T = 4 + -8(x+1) + -2(y-2)$$

Ex: Approximate $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

الحل:

assume:

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{at } (3, 2, 6) \longrightarrow$$ قرب للأقرب رقم ممكن.

طريقة الحل: لازم افرض علاقة بدل الأرقام إلي معطيني إياها عشان أقدر أجيب معادلة Tangent plane.

$$F_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{(3,2,6)} = \frac{3}{7}$$

$$F_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{(3,2,6)} = \frac{2}{7}$$

$$F_z = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{(3,2,6)} = \frac{6}{7}$$

$$\Delta x = 3.02 - 3 = 0.02$$

$$\Delta y = 1.97 - 2 = -0.03$$

$$\Delta z = 5.99 - 6 = -0.01$$

$$L(x,y,z) = 7 + \frac{0.06}{7} - \frac{0.06}{7} - \frac{0.06}{7}$$

$$= 7 - \frac{6}{700} \quad \#$$

Ex:- show that $\underbrace{\dfrac{2x+3}{4y+1}}_{\text{غير خطي}} = 3 + 2x - 12y$ at $(0,0)$.

* المطلوب قتبث أنه الاقتران من جهة اليمين يساوي الاقتران من جهة اليسار.

* دائماً نبدأ بالطرف غير الخطي.

$$F_x = \left.\frac{2}{4y+1}\right|_{(0,0)} = 2$$

$$F_y = \left.\frac{-4(2x+3)}{(4y+1)^2}\right|_{(0,0)} = -12$$

$$z_0 = \left.\frac{2x+3}{4y+1}\right|_{(0,0)} = 3$$

$$\frac{2x+3}{4y+1} = 3 + 2x - 12y \quad \#$$

Ex:- show that $\sqrt{y+\cos(x^2)} = 1 + \frac{1}{2}y$ at $(0,0)$

* بلش بالطرف غير الخطي.

$$\sqrt{y+\underbrace{(\cos^2 x)^2}_{\text{ملهاش مشتقة}}} \Rightarrow \sqrt{y+\underbrace{\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)}_{\text{متطابقة}}}$$

$$F_x = \left.\frac{-\cancel{\tfrac{2}{2}}\sin 2x}{2\sqrt{y+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}}\right|_{(0,0)} = 0$$

$$F_y = \left.\frac{1}{2\sqrt{y+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{2}$$

$$f(x,y) = f(0,0) + F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

$$\sqrt{y+\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{2}y \quad \#$$

Ex:- Find linear approx of $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ at

$(2,1) \longrightarrow (1.95, 1.08)$.

سؤال سنوات

2017

الحل:

$$f_x = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}} \Bigg|_{(2,1)} = -\frac{2}{3}$$

$$f_y = \frac{-(7)(2)\,y}{2\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}} \Bigg|_{(2,1)} = -\frac{7}{3}$$

$$f(2,1) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2} = 3$$

$* \Delta x = 1.95 - 2 = -0.05$

$* \Delta y = 1.08 - 1 = 0.08$

$$Z = 3 - \frac{2}{3}(-0.05) - \frac{7}{3}(0.08)$$

$$= 3 + \frac{0.1}{3} - \frac{0.56}{3} = 3 - \frac{0.46}{3} \quad \#$$

14.5 : The chain Rule :

[1] 1- Variable :

$y = f(x) \quad , \quad x = g(t)$

$y \longrightarrow x \longrightarrow t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$ هاد الحكي أخذنا بالكولس [1]

[2] 2- variable :

$Z = f(x, y) \quad , \quad x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$

مشتقة عادية

تقسيم

المشتقة جزئية

$Z \to x \to t$

$Z \to y \to t$

تضيع

$\frac{dz}{dt} = \longrightarrow$ يوجد مساري

$x \longrightarrow t$

$y \longrightarrow t$

بأخذ المسارين واشارة جمع بينهم

- المشتقة بين t و x ← عادية
- " " t و y ← "
- " " Z و x ← جزئية
- " " Z و y ← جزئية
- دائماً بظل اشتق على بين ما أوصل للمتغير إلي بدي اياه.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

OR

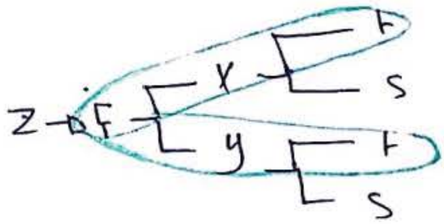
$$\frac{dz}{dz} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

* راح تفهم من خلال الأمثلة *

Ex: $Z = f(x, y)$, $x = t^2 \cdot e^{3s}$, $y = ts^4$

Find $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{ds}$.

* أولاً ارسم شجرة الحل :



يوجد مسارين

1) $\frac{dz}{dt} = F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt}$

$= F_x \cdot (2e^{3s} \cdot t) + F_y \cdot s^4$

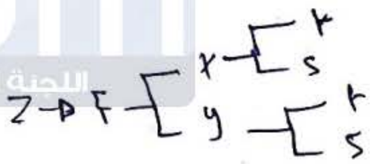
2) $\frac{dz}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \cdot \frac{dy}{ds}$

$= F_x \cdot [t^2 e^{3s} \cdot (3)] + F_y [4ts^3]$

Ex: $Z = 4x^2 + 2y$, $x = t^2 + s^2$, $y = t^3$

Find : $\frac{df}{dt}$, $\frac{df}{ds}$.

* ارسم الشجرة :



1) $\frac{df}{dt} = F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt}$

$= (8x)(2t) + (2) \cdot 3t^2$

عوض بدل x

2) $\frac{df}{ds} = F_x \cdot \frac{dx}{ds} + F_y \cdot \frac{dy}{ds}$

$= (8x)(2s) + (2)(0)$

$= 16xs$

من السؤال

$x = t^2 + s^2$

$= 16(t^2 + s^2)(s)$

$= 16st^2 + 16s^3 \longrightarrow = 16s(\underbrace{t^2 + s^2}_{x})$

Ex: $Z = e^{x}\sin y \quad , \; x = st^{2} \; , \; y = s^{2}t .$

Find: 1) $\frac{dZ}{dx}$, 2) $\frac{dz}{dy}$, 3) $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{ds}$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\cancel{z}}{dF} \cdot \frac{dF}{dx}$$

or F

$$Z \begin{cases} x \begin{cases} t \\ s \end{cases} \\ y \begin{cases} t \\ s \end{cases} \end{cases}$$

1) $\frac{dz}{dx} = e^{x} \underbrace{\sin y}_{\text{ثابت}} .$

2) $\frac{dz}{dy} = \underbrace{e^{x}}_{\text{ثابت}} \cos y .$

3) $\frac{dz}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt}$

$$= (e^{x}\sin y) \cdot (2st) + (e^{x}\cos y) \cdot (s^{2})$$

4) $\frac{dz}{ds} = F_x \cdot \frac{dx}{ds} + F_y \cdot \frac{dy}{ds}$

$$= (e^{x}\sin y) \cdot (t^{2}) + (e^{x}\cos(y))(2ts)$$

$x = st^{2}$ $\quad$ $y = s^{2}t$

* لو كان معطيك قيم لـ $t = 0$ مثلاً
$s = 1$

* عوض بدل كل x , y من الاقترانات الأصلية
عشان تصير معك كل الاقتران بدلالة t , s
وبطلع الجواب معك رقم ثابت بالآخر.

Ex :- $Z = F(x,y)$, $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$.

Find [1] $\frac{dz}{dr}$, $\frac{d^2 z}{dr^2}$, $\frac{d^2 z}{dr\,ds}$.

$$\boxed{1}\ \frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$F \begin{cases} x \begin{cases} r \\ s \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ s \end{cases} \end{cases}$$

OR

$$\frac{dz}{dr} = F_x \cdot \frac{dx}{dr} + F_y \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$\frac{dz}{dr} = F_x \cdot [2r] + F_y \cdot [2s]$$

$$\boxed{2}\ \frac{d^2 z}{dr^2} \longrightarrow$$ أولاً بجيب $\frac{dz}{dr}$ وبعدها

ثم بجيب $\frac{d^2 z}{dr^2}$

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \underbrace{F_x \cdot 2r}_{\text{مشتقة ضرب}} + \underbrace{F_y \cdot 2s}_{\text{ليست مشتقة ضرب}}$$

لأني بشتق بالنسبة لـ r

لأن F_x يوجد فيها r
* أطلع على السؤال وأنا بشتق بالنسبة لـ r

$$F_x \begin{cases} x \begin{cases} r \\ s \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ s \end{cases} \end{cases} \qquad F_y \begin{cases} x \begin{cases} r \\ s \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ s \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = [2F_x + 2r \cdot F_{xr}] + 2s\,F_{yr}$$

$$= 2F_x + 2r\left[F_{xx} \cdot \frac{dx}{dr} + F_{xy} \cdot \frac{dy}{dr}\right] + 2s\left[F_{yx} \cdot \frac{dx}{dr} + F_{yy} \cdot \frac{dy}{dr}\right]$$

#

$$\boxed{3}\ \frac{d^2 z}{dr\,ds} =$$ الأولى $$\longrightarrow \frac{dz}{ds} = F_x \cdot \frac{dx}{ds} + F_y \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2 z}{dr\,ds} = F_{xr} \cdot 2s + 2F_y + 2r \cdot F_{yr}$$

$$= 2s\left[F_{xx} \cdot \frac{dx}{dr} + F_{xy}\frac{dy}{dr}\right] + 2F_y + 2r\left[F_{yx} \cdot \frac{dx}{dr} + F_{yy} \cdot \frac{dy}{dr}\right]$$

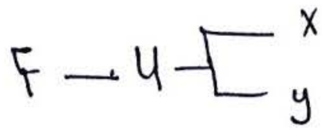
#

Ex: show that $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = 0$, $Z = F(x-y)$.

الحل :

$Z = F(x-y)$, assume (افرض) $u = x - y$

$\therefore Z = F(u)$



$\frac{dz}{dx} = F_u \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = F_u \cdot (1)$

$\frac{dz}{dy} = F_u \cdot \frac{du}{dy}$

$= F_u \, (-)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = F_u - F_u$

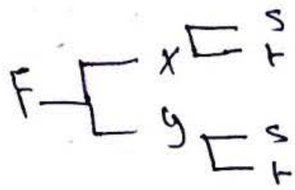
$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = \text{Zero}$ #

Ex: -

$Z = F(x, y)$, $x = s + t$, $y = s - t$

show that $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz}{dt}$

الحل :-



* $\frac{dz}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt}$

$= F_x \cdot (1) + F_y \cdot (-1)$

* $\frac{dz}{ds} = F_x \cdot \frac{dx}{ds} + F_y \cdot \frac{dy}{ds}$

$= F_x \cdot (1) + F_y \cdot (1)$

$\frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz}{dt} = (F_x)^2 - (F_y)^2$

$= \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$ #

Ex :- $Z = f(x^2 + y^2)$ is differerial function of one Variiable show that $y \cdot \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0$

مهم

الحل : $u = x^2 + y^2$

$Z = f(u)$

$$x \frac{dz}{dx} = F_u \cdot \frac{du}{dx} \xrightarrow[\text{اضرب بـ } y]{\text{حسب السؤال}} y \cdot \frac{dz}{dx} = 2xy \cdot \frac{du}{dx}$$

$$x \frac{dz}{dy} = F_u \cdot \frac{du}{dy} \xrightarrow[\text{اضرب } x]{\text{حسب السؤال}} x \cdot \frac{dz}{dy} = 2xy \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y \cdot \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 2xy \cdot \frac{du}{dx} - 2xy \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{du}{dx} (\cancel{2xy} - \cancel{2xy}) = 0 \quad \#$$

Ex : سؤال سنوات 2012 If $Z = xy + x f\left(\frac{y}{x}\right)$, show that

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + Z$$

$\boxed{\text{الحل}}$: $\frac{dz}{dx} = y + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (1)$

$\xrightarrow{\text{اضرب } x}$ $x \frac{dz}{dx} = xy + \cancel{x^2} F'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{\cancel{x^2}}\right) + x F\left(\frac{y}{x}\right)$

$$x \frac{dz}{dx} = \underbrace{xy + x F\left(\frac{y}{x}\right)}_{Z \text{ = حسب السؤال}} - y F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x \frac{dz}{dx} = Z - y F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dz}{dy} = x + \cancel{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$y \cdot \frac{dz}{dy} = xy + y F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

+

$$x \frac{dz}{dx} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = Z - \cancel{y f'\left(\frac{y}{x}\right)} + xy + \cancel{y f'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$= Z + xy \quad \#$$

سؤال سنوات 2017

Let $x = s+t$ and $y = s-t$, show that for any differential function $F(x,y)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$

شجرة جبنا

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (1) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (1)$$

في السؤال لازم تكتب حرف ∂ مائل

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (1) - \frac{\partial f}{\partial y}$$

هاد السؤال كانت عليه (4 علامات)

$$\frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad \#$$

* Implicit differentiation :- *الاشتقاق الضمني*

1. $F(x,y)=0$ → معادلة وليس اقتران

$$0 = F(x,y) \begin{cases} x \\ y \to x \end{cases}$$

$$0 = F_x + F_y \frac{dy}{dx}$$

حفظ القانون → $$\boxed{-\frac{F_x}{F_y} = \frac{dy}{dx}}$$

2. $F(x,y,z)=0$ → Eqn معادلة

$$0 = F_z \cdot \frac{dz}{dx} + F_x \qquad F \begin{cases} x \\ y \\ z \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{F_x}{F_z} = \frac{dz}{dx}} \quad \text{OR} \quad \boxed{-\frac{F_y}{F_z} = \frac{dz}{dy}}$$

حفظاً حفظ

Ex: $Z = \underbrace{\frac{\ln(x+y^3)}{y}}_{\text{اقتران}}$. Find $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}} = \frac{1}{y(x+y^3)}$$

المشتقة بالنسبة لـ x

OR حولها لمعادلة $Zy = \ln(x+y^3)$

$$\ln(x+y^3) - Zy = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F_x}{F_z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{1}{x+y^3}}{-y} = \frac{1}{y(x+y^3)}$$

Ex:- $Z = \dfrac{Ln(x+Z)}{y}$, Find $\dfrac{dz}{dx}$

ضمني

ضمني   ضمني

Z ——— Z

حولنا لمعادلة

$$Zy - Ln(x+Z) = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{(x+Z)}}{y - \frac{1}{x+Z}} = \frac{\frac{1}{(x+Z)}}{\frac{1-y(x+Z)}{(x+Z)}} = \frac{1}{1-y(x+Z)}$$

Ex:- $x^2 + 2xy = y - y^3$ Find $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

$$x^2 + 2xy + y^3 - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{[2x+2y]}{[2x+3y^2-1]} = \frac{-2x-2y}{(2x+3y^2-1)}$$

Ex:- $y = \dfrac{Z^2 - x\,Ln Z}{Z+1}$ Find $\dfrac{dy}{dz} = ??$

الحل:
الثاني

$$(Z+1)y + x\,Ln z - Z^2 = 0$$

* طالب $\frac{dy}{dz}$ يعني المشتقة بالنسبة لـ Z

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{F_z}{F_y} = -\frac{\left[y + \frac{x}{z} - 2z\right]}{(z+1)} \quad \#$$

* بتقدر تحلها حلين:

الحل الأول: $\dfrac{\text{المقام} \times (\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط}) \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

الحل الثاني: أحولها لمعادلة وعلى القانون.

الحل الأول:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{(z+1)\left(2z - \frac{x}{z}\right) - (z^2 - x\,Ln z)(1)}{(z+1)^2} \quad \#$$

14.6 : Direction derivative of gradiant Vector :-

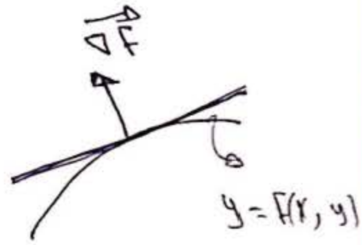
* Gradiant vector :-

* $\vec{\nabla f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j}$ ⇝ 2-variable

* $\vec{\nabla f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$ ⇝ 3-variable.

* من خصائص $\vec{\nabla f}$:

1) دائماً يكون عمودي على المماس ، مهم



Ex:- $f(x,y) = xy$

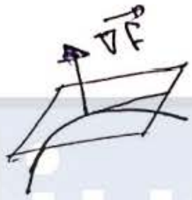
* Find $\vec{\nabla f}(2,3) = ??$

الحل

$f_x = y \Big|_{(2,3)} = 3$

$f_y = x \Big|_{(2,3)} = 2$

$\vec{\nabla f} = 3i + 2j$ #



2) عمودي على Tangent plane مهم

في حالة 3-variable

3) عمودي على Tangent Line ~~Plane~~ مهم

في حالة 2-varible

Ex:- $f(x,y,z) = xy + y.z + x.z$ Find $\vec{\nabla f}(1,-1,2) = ??$

$f_x = y + 0 + z \Big|_{(1,-1,2)} = 1$

$f_y = x + z + 0 \Big|_{(1,-1,2)} = 3$

$f_z = 0 + y + x \Big|_{(1,-1,2)} = 0$

$\vec{\nabla f} = \hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$ #

*

* حكينا قبل شوي أنو من خواصها

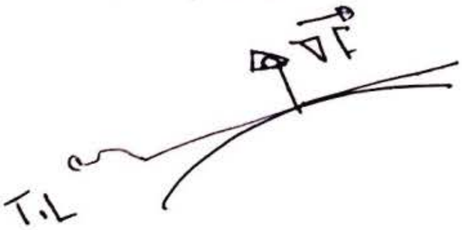
$\vec{\nabla f}$ أنو بكون عمودي على T.P في حالة 3-Var

وبكون عمودي على T.L في حالة 2-Var

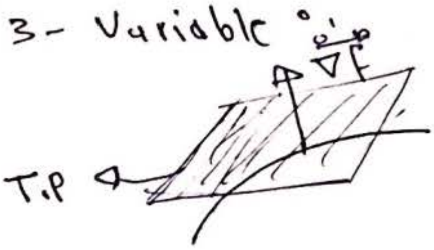
* يعني لو كان عندي كيرف أو أي اقتران بقدر أكتب معادلة T.P إذا كان معي نقطة على هاد plane إذا اشتقيته ← $\vec{\nabla f}$

* ونفس الشي بالنسبة لـ T.Line.

2-Variable:



3-Variable:



Tplane:- $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$ → مهم

هاي الصورة الثانية لمعادلة T.plane

Tplane:- $Z_T \overset{z_0}{=} f(x_0,y_0)+f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$ → مهم

- هاي الصورة الأولى لمعادلة T.P إلي تعلمنا قبل.

Eqn: The Eqn of Normal Line to the tangent plane:-

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$$

→ معادلة الـ Line العمودي على T.P

Ex: 1) Write an Equation of the tangent plane to this surface: $xy + xz + yz = 5$ at $(1, 2, 1)$

معادلة

$$F_x = y + z \Big|_{(1,2,1)} = 3$$

$$F_y = x + z \Big|_{(1,2,1)} = 2$$

$$F_z = x + y \Big|_{(1,2,1)} = 3$$

$\rightarrow$ Tp: $3(x-1) + 2(y-2) + 3(z-1) = 0$ #

2) Find Eq of the normal Line to the Tangent plane ??

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$$ #

Ex: Write an Equation of tangent plane $F(x, y) = x^2 + y^2$ at $(-1, 2)$

* $F(\cancel{x}, \cancel{y}) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2 \rightarrow$ $\boxed{\text{Function of 2-variable}}$

السؤال هاد راح أحله حلين :

1) الحل الأول تعلمنا قبل .

2) الحل الثاني أنا طلع $\vec{\nabla f}$.

الحل الأول $\rightarrow$ * $F_x = 2x \Big|_{(-1,2)} = -2$

* $F_y = 2y \Big|_{(-1,2)} = 4$

* $F(x_0, y_0) = (-1)^2 + (2)^2$

$z_0 = 5$

$$z_T = \overset{z_0}{5} + -2(x+1) + 4(y-2)$$

الحل الثاني $\rightarrow$ $\vec{\nabla f} =$ $\xrightarrow{\text{حول المعادلة عشان أطلع } \nabla f \text{ دائماً}}$ $x^2 + y^2 - z = 0$

الحل الثاني

$F_x = -2$
$F_y = 4$
$F_z = -1$

$\rightarrow \vec{\nabla f} = -2i + 4j - k$

Tp: $-2(x+1) + 4(y-2) - 1(z-5) = 0$

Ex:- $y = x^2$ write an ① Equ of the normal Line to the ② tangent Line at $(2, 4)$.

الحل:

$$y - x^2 = 0$$

$$F_x = -2x \Big|_{(2,4)} = -4 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = -4i + j$$

$$F_y = 1$$

$\boxed{1}$ Normal Line :- $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-4}{1}$

$\boxed{2}$ equ of tangent Line :- (معادلة المماس)

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-4}{1} \Longrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{4}$$

نقلب ما في المقام مع وضع اشارة سالبة لأحدهما.

T.Line :- $y - 4 = 4(x-2)$

Find equ of Tplane & Normal Line for :-

$2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$ at $(3, 3, 5)$

$$F_x = 4(x-2) \Big|_{(3,3,5)} = 4$$

$$F_y = 2(y-1) \Big|_{3} = 4$$

$$F_z = 2(z-3) \Big|_{5} = 4$$

T plane:

$4(x-3) + 4(y-3) + 4(z-5) = 0$ #

N Line :-

$$\frac{x-3}{\cancel{4}} = \frac{y-3}{\cancel{4}} = \frac{z-5}{\cancel{4}}$$

$x - 3 = y - 3 = z - 5$ #

Ex:- Find an Eq of tangent plane & Normal Line to this surface

$Z+1 = X \cdot e^{y} \cdot \cos(Z)$ at $(1,0,0)$

ضمني

حول المعادلة

و حله بالصورة التالية

لمعادلة T.Plane

$$x \cdot e^{y} \cdot \cos(z) - (z+1) = 0$$

$$F_x = e^{y}\cos(z)\Big|_{(1,0,0)} = 1$$

$$F_y = x\cos(z) \cdot e^{y}\Big|_{(1,0,0)} = 1$$

$$F_z = -x e^{y}\sin(z)\Big|_{(1,0,0)} = -1$$

$\Rightarrow \vec{\nabla f} = i + j - k$

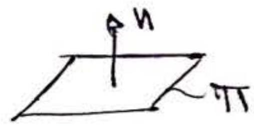
Tplane : $(x-1) + y - Z = 0$

Normal Line : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{Z-0}{-1}$

Ex:- At what point on $y = x^2 + Z^2$ is the tangent plane parallel to the plane $x + 2y + 3Z = 1$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 2x \\ F_y = -1 \\ F_z = 2Z \end{array}\right] \rightarrow \vec{\nabla f} = 2x\hat{i} - \hat{j} + 2Z\hat{k}$$

$$\vec{n} = \langle 1, 2, 3 \rangle$$



$$\vec{\nabla f} = \alpha \vec{n}$$

يوازي $\vec{\nabla f} \parallel n$

يعني لا يساوي إلا إذا كان واحد منهم مضروب برقم $\vec{\nabla f} = \alpha \vec{n}$

رقم

$$2xi - j + 2k = \alpha(i + 2j + 3k)$$

$2x = \alpha$ → ①

$-1 = \alpha 2$ → $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$ → عوض في ① و ②

$2Z = \alpha Z$ → ②

$x = -\frac{1}{4}$, $Z = -\frac{3}{4}$ $\xrightarrow{\text{عوض في الاقتران الأصلي}}$ $y = x^2 + z^2 = \frac{10}{16}$

$p\left(-\frac{1}{4}, \frac{10}{16}, -\frac{3}{4}\right)$ #

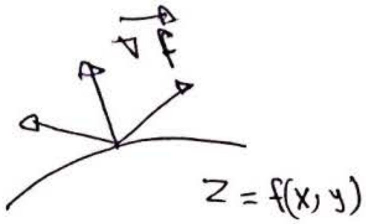
* Directional Derivative (D_f)

$D_f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{U}_a$

Dot Product

$\hat{U}_a$ دائماً نتأكد أن طوله يساوي 1

حصلنا ← الناتج Scalar (عدد)



* دائماً مقدار $\vec{\nabla} f$ يكون ثابت في جميع اتجاهاته ولكن $\hat{U}_a$ يتغير.

Ex: $f(x, y) = xy$, $P(2, -1)$

Find [1] $\vec{\nabla} f(2, -1)$.

[2] $D_a f(2, -1)$; $\vec{a} = 2i + 3j$ ← طوله ليس واحد

[1] $\vec{\nabla} f = -i + 2j$

[2] $D_a f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{U}_a$

$\vec{a} = 2i + 3j$

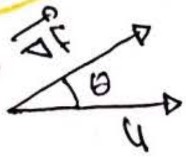
$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\hat{U}_a = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle 2, 3 \rangle$

$= \langle -1, +2 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \langle 2, 3 \rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{13}} [-2 + 6] = \frac{4}{\sqrt{13}}$

* $D_a f = \underbrace{\vec{\nabla} f \cdot \hat{U}}_{\text{من قانون cosin}}$



$\vec{D} f_a = |\vec{\nabla} f| \, \underbrace{|\hat{U}|}_{1} \cos\theta$ → $\theta = 0$ → Max Value

$\theta = \pi$ → Min Value

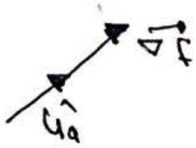
$D_f = |\nabla f|$

صح

Min Value D_f ← $-\|\nabla f\| \leq D_f \leq \|\nabla f\|$ → Max Value of D_f.

يعني اتجاه $\vec{\nabla} f$ عكس اتجاه $\hat{U}_a$

يعني اتجاه $\vec{\nabla} f$ نفس اتجاه $\hat{U}_a$



* راح يتوضح من خلال المثال *

Ex:- Find the Max Value of the directional Derivative (DF)

$F(x,y) = xy \quad , \quad P(2,-1)$. ??

$\vec{\nabla f} = -i + 2j \rightarrow \|\nabla f\| = \sqrt{1+4}$
$= \sqrt{5}$

* max of $Df(2,-1) = \sqrt{5}$
* min of $Df(2,-1) = -\sqrt{5}$

$\Rightarrow \underset{min}{(-)\sqrt{5}} \leq Df \leq \underset{max}{(+)\sqrt{5}}$

Ex:- $Df(3,-2,1) = -5$ & $\|\vec{\nabla f}(3,-2,1)\| = 5$

$a = 2i - j - 2k$

* Find $\vec{\nabla f}(3,-2,1)$??

* السؤال معطيك مقدار $\|\nabla f\|$
ومقدار Df بالقيمة السالبة طالب احسبلو
$\vec{\nabla f} \leq$ vector.

* $Df = -5 \rightarrow \vec{\nabla f}$ عكس $\hat{u}_a$

* بما أنو معطيك قيمة Df بالسالب أكيد
راح يكون اتجاه $\vec{\nabla f}$ opposite اتجاه $\hat{u}_a$.
عكس

$\vec{a} = 2i - j - 2k$ تأكد أن مقداره يساوي $\underline{\underline{1}}$

$|a| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$
$= 3$

$\hat{u}_a = \frac{1}{3} < 2, -1, -2 > \longrightarrow \hat{u}_{\nabla f} = \frac{1}{3} < -2, 1, 2 >$

$\vec{\nabla f} = \underbrace{5}_{\text{مقدار } \vec{\nabla f}} \cdot \frac{1}{3} < -2, 1, 2 >$

$\vec{\nabla f} = < \frac{-10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3} >$

#

Ex 6: The max DF(1,2,3) = 4 & it occours in the direction of $\vec{a} = (2i - 2j + k)$, Find the DF(1,2,3) in the direction towords the origin. *2017 * سؤال سنوات

* طالب مني احسبلو DF معطيني Vector بدي استخدمو عشان أطلع منو $\vec{\nabla f}$ و بعدين أطلع U.V من النقطة (1,2,3) & origin (0,0,0).
طبعاً حسب قانون $\vec{\nabla f} \cdot \vec{U_a} = DF$

∇f طلع منو وزي ما حكينا مقدار ثابت بجميع الاتجاهات

$\vec{a} = 2i - 2j + k$

$|a| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$U_a = \frac{1}{3} \langle 2, -2, 1 \rangle \rightarrow U_a = \nabla f$ نفسو

لأنو معطيني max value of DF = 4

$\rightarrow \vec{\nabla f} = \underline{\underline{4}} \cdot \frac{1}{3} \langle 2, -2, 1 \rangle$

من السؤال

$\vec{\nabla f} = \frac{4}{3} \langle 2, -2, 1 \rangle$

خلي أجيب U.vector $\rightarrow (1,2,3) \rightarrow (0,0,0)$

$\vec{U} = \langle -1, -2, -3 \rangle$ -أعرف أن طوله واحد

$|u| = \sqrt{1+4+9}$
$= \sqrt{14}$

$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle -1, -2, -3 \rangle$

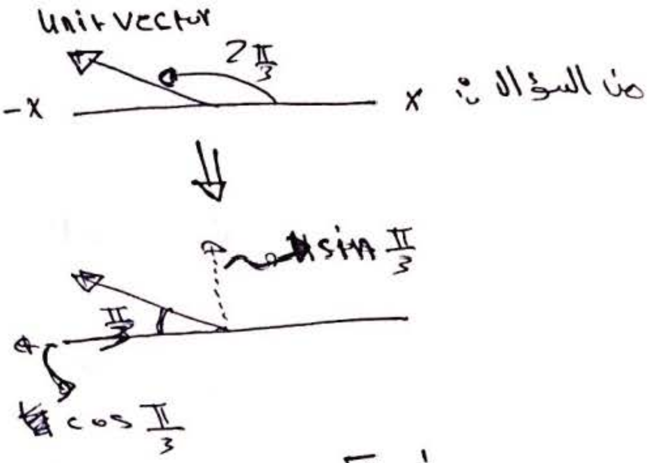
$\vec{DF} = \vec{\nabla f} \cdot \hat{U}$
$= \frac{4}{3} \langle 2, -2, 1 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \langle -1, -2, -3 \rangle$

$= \frac{4}{3\sqrt{14}} [-2 + 4 - 3]$

$= -\frac{4}{3\sqrt{14}}$ #

Ex :- Find direction Derivative (DF) of $f(x,y) = y e^{-x}$ at $(0,4)$ & the direction that make angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ with x-axis.

$\hat{u}$ يعني



$$f_x = y e^{-x}(-1) \Big|_{(0,4)} = -4$$

$$f_y = e^{-x} \Big|_{(0,4)} = 1$$

$$\vec{\nabla} f = -4i + j$$

$$\vec{U} = -\frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

لأنو بالمحور x-axis السالب

$$DF = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$$

$$= \langle -4, 1 \rangle \cdot \langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$$

$$DF = \left[2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

تأكد أن مقدار $\vec{u}$ يساوي $\underline{\underline{1}}$

$$|u| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{4}} = \underline{\underline{1}}$$

Ex: Find the directions ($\hat{u}$ المرفوض) in which the directional derivative of function of $f(x,y) = y e^{-xy}$ at $(0,2)$ has the value 1.

assume $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} \longrightarrow |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \longrightarrow ①$$

$\vec{\nabla f} = ??$

$\longrightarrow f_x = y e^{-xy} (-y) \Big|_{(0,2)} = -4$

$\longrightarrow f_y = \underbrace{y e^{-xy} \cdot (-x) + e^{-xy} \cdot (1)}_{\text{مشتقة ضرب}} \Big|_{(0,2)} = 1$

$\vec{\nabla f} = -4i + j$

$\underbrace{Df}_{\text{معطى بالسؤال}} = \vec{\nabla f} \cdot u$

$1 = \langle -4, 1 \rangle \cdot \langle u_1, u_2 \rangle$

$② \leftarrow 1 = -4u_1 + u_2 \longrightarrow u_2 = 1 + 4u_1 \longrightarrow$ عوض في ①

$$(1 + 4u_1)^2 + u_1^2 = 1$$

$$u_1 = -\frac{8}{17} \longrightarrow \text{عوض في } ②$$

$$u_2 = -\frac{15}{17}$$

$$\boxed{\hat{u} = -\frac{8}{17} i - \frac{15}{17} j} \quad \#$$

Ex :- Given that : $D_u f(1,2) = -5 \to \hat{u} = \langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \rangle$

$D_v f(1,2) = 10 \to \hat{v} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$

* Find ① $\vec{\nabla} f(1,2)$ in the direction towords the origin.

② $D_{\vec{a}} f(1,2)$, $\vec{a} = -i - 2j$ ③ $D_i f(1,2)$, ④ $D_{-2j} f(1,2)$.

$Df = \vec{\nabla} f \cdot u$

$-5 = \langle f_x i + f_y \rangle \cdot \langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \rangle$ ①

$10 = \langle f_x + f_y \rangle \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$ ②

تأكد أن $\hat{u}, \hat{v}$ طولهم يساوي واحد $\to$ $|u| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \underline{\underline{1}}$

$|v| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \underline{\underline{1}}$

$-25 = 3 f_x i - \frac{4}{5} f_y j$

$50 = 4 f_x i + 3 f_y j$

بالحذف والتعويض $\to$ $f_x = 5$, $F_y = 10$

$\boxed{1}$ $\vec{\nabla} f = 5i + 10j$

$\boxed{2}$ $Df = ??$

$Df = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}_a$ $\qquad \vec{a} = -i - 2j$

$= \langle 5, 10 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, -2 \rangle$ $\qquad |a| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} [-5 - 20] = \frac{-25}{\sqrt{5}}$ $\qquad \hat{u}_a = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, -2 \rangle$

$= -5\sqrt{5}$ #

$\boxed{3}$ $D_i f(1,2) = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$

$= \langle 5, 10 \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle$

$i \to$ باخذ اتجاهو

$Df = 5$ #

$\boxed{4}$ $D_{-2j} f(1,2) = \langle 5, 10 \rangle \cdot \langle 0, -1 \rangle$ $\qquad u = -2j$, $|u| = \sqrt{4} = 2$

$Df = -10$ # $\qquad \hat{u} = \frac{-2}{2} j$, $\hat{u} = -j$

14.7 :- Max & Min Values [Extreme Values] :-

→ $Z = f(x, y)$ ⇒ functions of 2-variable.

$P_0(x_0, y_0)$ → critical point ~ نقطة حرجة

تكون [1] $f_x = 0$ & $f_y = 0$

OR [2] f_x or f_y or both doesn't exsit.

→ To classify the critical point $f_x = 0$, $f_y = 0$

* Apply 2nd partial derivative test :-

[1] If $D > 0$ & $f_{xx} > 0$ → [Local min] مهم

[2] If $D > 0$ & $f_{xx} < 0$ → [Local max] مهم

[2] If $D < 0$ → saddle point (max & min) مهم

[3] If $D = 0$ → test fail مهم

$\boxed{D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2}$ → حفظ مهم

Ex :- Find Local Min & max & saddle point :-

$$F(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

الحل :-

* $f_x = -2 - 2x = 0$ (ساويها بالصفر) → $2x = -2$ → $\boxed{x = -1}$

$f_y = 4 - 8y = 0$ → $\boxed{y = \frac{1}{2}}$

one critical pt $(-1, \frac{1}{2})$

$f_{xx} = -2$

$f_{yy} = -8$

$f_{xy} = 0$

$D = f_{xx} * f_{yy} - [f_{xy}]^2$

$D = -2 * -8 - 0$

$D = 16 > 0$ & $f_{xx} < 0$ → $(-1, \frac{1}{2})$ Local max

Ex:- Find & classify the criticals for local max & min or saddle pt.

$$F(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

الحل:

$F_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{x^2}$

$F_y = x - \frac{1}{y^2} = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{y^2}$

$x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \rightarrow x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

يهمل دائماً صفر مقام أو من خلال التعويض $\boxed{x = 0}$

$\boxed{x = 1}$

$y = \frac{1}{(0)} = 0$ ✗

$y = \frac{1}{1} = \boxed{y = 1}$

$P(1,1)$

* $F_{xx} = \frac{2x}{x^4}$ * $F_{xy} = 0$

* $F_{yy} = \frac{2y}{y^4}$

$D = F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{xy}^2$

$(1,1) \Rightarrow D = [2 * 2] - [0]^2$

$D = 4 > 0$ & $F_{xx} > 0 \longrightarrow P(1,1)$ Local min

وصورتها من الاقتران الأصلي $F(1,1) = (1 * 1) + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$

$F(1,1) = 3$

* $F(x,y) = e^{y}(y^2 - x^2)$ Find & classify the criticals for Local Max & min or saddle.

$\rightarrow F(x,y) = y^2 e^{y} - x^2 e^{y}$

[1] $F_x = -2xe^{y} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

[2] $F_y = y^2 e^{y} + 2ye^{y} = 0 \rightarrow e^{y}(y^2 + 2y) = 0$

$y^2 + 2y = 0$

$y(y+2) = 0$

$\boxed{y = 0}$ $\quad c_1(0,0)$

$\boxed{y = -2}$ $\quad c_2(0,-2)$

* $F_{xx} = -2e^{y}$.

* $F_{yy} = [y^2 e^{y} + 2e^{y} y] + [2y e^{y} + 2e^{y}]$

$F_{xy} = -2xe^{y}$.

(x_0, y_0)	$F_{xx} = -2e^{y}$	$F_{yy} =$	$F_{xy} = -2xe^{y}$	$D = F_{xx} * F_{yy} - F_{xy}^2$
$(0,0)$	-2	2	0	$-4 < 0 \rightarrow$ saddle pt
$(0,-2)$	$-2e^{-2}$ سالب	$-2e^{-2}$	0	$4e^{-4} > 0$ & $F_{xx} < 0$ $(0,-2) \rightarrow$ Local max

Ex:- Find & classify the criticals for Local Max, Min or saddle :- $F(x,y) = x \cdot y(3-x-y)$.

Solution:-

جزاءة قران → $F(x,y) = 3xy - yx^2 - xy^2$

critical : $F_x = 0$ & $F_y = 0$

$F_x = 3y - 2yx - y^2 = 0 \longrightarrow y(3-2x-y) = 0$ ($y=0$ & $3-2x-y=0$)

$F_y = 3x - x^2 - 2xy = 0 \longrightarrow x(3-x-2y) = 0$ ($x=0$ & $3-x-2y=0$)

$\boxed{1}$ $y=0$ & $x=0 \longrightarrow (0,0)$ $\boxed{2}$ $y=0$ & $3-x-2y=0 \longrightarrow (3,0)$

$\boxed{3}$ $x=0$ & $3-2x-y=0 \longrightarrow (0,3)$ $\boxed{4}$ $3-x-2y=0$ & $3-2x-y=0 \rightarrow (1,1)$

(x_0,y_0)	$F_{xx} = -2y$	$F_{yy} = -2x$	$F_{xy} = 3-2x-2y$	$D = F_{xx} \cdot F_{yy} - (F_{xy})^2$
$(0,0)$	0	0	3	$-9 < 0 \rightarrow$ saddle point
$(0,3)$	-6	0	-3	$-9 < 0 \rightarrow$ saddle point
$(3,0)$	0	-6	-3	$-9 < 0 \rightarrow$ saddle point
$(1,1)$	-2	-2	-1	$3 > 0$ & $F_{xx} < 0$ Local Max

Ex :- Find local Min & Max & saddle point :-

$F(x,y) = y^2 - 2y\cos(x)$, $-1 \leq x \leq 7$.

critical pt :-

$F_x = 2y\sin x = 0 \longrightarrow \boxed{y=0}$ & $\sin x = 0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=2\pi}$ $\boxed{x=\pi}$

$F_y = 2y - 2\cos x = 0$

$\boxed{y = \cos x}$

1) $y=0$ & $y=\cos(x) \longrightarrow (\frac{\pi}{2},0)\ (\frac{3\pi}{2},0)$

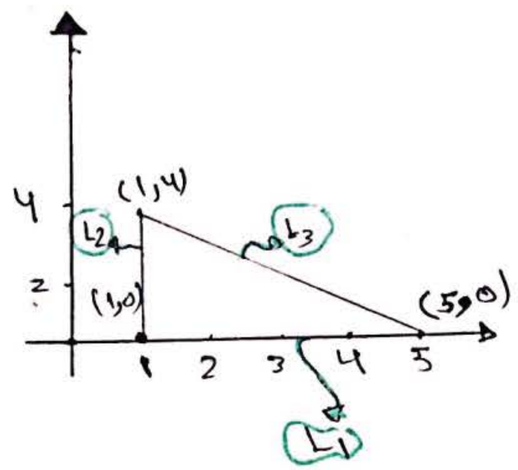
2) $x=0$ & $y=\cos(x) \longrightarrow (0,1)$

3) $x=2\pi$ & $y=\cos(x) \longrightarrow (2\pi,1)$

4) $x=\pi$ & $y=\cos(x) \longrightarrow (\pi,-1)$

(x_0,y_0)	$F_{xx} = 2y\cos x$	$F_{yy}=2$	$F_{xy}=2\sin x$	$D = F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2$
$(\frac{\pi}{2},0)$	0	2	2	$-4<0 \longrightarrow$ saddle point
$(\frac{3\pi}{2},0)$	0	2	-2	$-4<0 \longrightarrow$ saddle point
$(2\pi,1)$	2	2	0	$4>0 \longrightarrow$ & $F_{xx}>0 \longrightarrow$ Local min
$(0,1)$	2	2	0	$4>0 \longrightarrow$ & $F_{xx}>0 \longrightarrow$ Local min
$(\pi,-1)$	2	2	0	$4>0 \longrightarrow$ & $F_{xx}>0 \longrightarrow$ Local min

Ex:- Find absolute Max & Min For $F(x,y) = 3 + x\cdot y - x - 2y$ over the trianguler region with vertices $(1,0)$, $(5,0)$ & $(1,4)$.



* هاد السؤال طالب مني احسب Absolute max & min

لهسا هي عبارة نقاط تشمل أطراف هذا المثلث بالإضافة إلى النقاط التي تقع داخل هذا المثلث وتكون هذه النقاط هي critical point مع مراعاة أن أي نقطة خارج هذا المثلث بنستثنيها ولا تعتبر نقطة داخل هذا المثلث.

1) critical Point :- (الداخل)

$F_x = y - 1 = 0 \rightarrow \boxed{y=1}$ $\boxed{P(1,2)} \rightarrow$ وتكون نقطة على المثلث (inside the region) (داخله)

$F_x = x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x=2}$

$\boxed{2}$ Boundary :- (الحدود)

$L_1 : \rightarrow$ معادلته $\rightarrow \boxed{y=0}$ — عوضنا فيها فراغ الأصلي.

$F(x,0) = 3 + yx - x - 2y$.

$\rightarrow F(x) = 3 - x \longrightarrow$ اشتقها وساويناها بالصفر $F'(x) = -1 \neq 0$ so just الأطراف $\boxed{(1,0)}$ $\boxed{(5,0)}$

$1 \leq x \leq 5$

$L_2 :$ معادلته $\boxed{x=1} \rightarrow f(1,y) = 3 + y - 1 - 2y$

$f(y) = 2 - y \rightarrow f'(y) = -1 \neq 0$ so just الأطراف $\boxed{(1,4)}$ $\boxed{(1,0)}$

$0 \leq y \leq 4$

$L_3 : \quad y = -x + 5 \longleftrightarrow F(x, (-x+5)) = 3 + x(5-x) - x - 2(5-x)$

$F(x,(5-x)) = 6x - x^2 - 7$

$F'(x) = 6 - 2x = 0$

$6 - 2x = 0 \longrightarrow \boxed{x=3}$ عوضنا في معادلة الخط L_3

$y = (-3) + 5$

$\boxed{y=2}$ $\boxed{(3,2)}$

تكملة الحل خلف

(x_0, y_0)	$f(x,y) = 3 + x \cdot y - x - 2y$
(1, 0)	2
(1, 4)	-2
(3, 2)	2
(5, 0)	-2
(2, 1)	1

absolute max

absolute min

سؤال سنوات 2012

Q: Find and classify the criticals for Local Maximum, minimum or saddle for the function

$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 + 5$.

* صار السؤال علامته لا تقل عن 7 علامات.

Solution:

$f_x = 3 - 3x^2 = 0 \longrightarrow 3 = 3x^2 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

$f_y = -4y + 4y^3 = 0 \longrightarrow 4y^3 - 4y = 0$

$4y(y^2 - 1) = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$, $\boxed{y = 1}$, $\boxed{y = -1}$

* $f_{xx} = -6x$
* $f_{yy} = -4 + 12y^2$
* $f_{xy} = 0$

(x_0, y_0)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$D = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2$
$(1,0)$	-6	-4	0	$24 > 0$ & $f_{xx} < 0$ Local Max
$(1,1)$	-6	8	0	$-48 < 0 \longrightarrow$ saddle point
$(1,-1)$	-6	8	0	$-48 < 0 \longrightarrow$ saddle point
$(-1,0)$	6	-4	0	$-24 < 0 \longrightarrow$ saddle pt
$(-1,1)$	6	8	0	$48 > 0$ & $f_{xx} > 0$ Local min
$(-1,-1)$	6	8	0	$48 > 0$ & $f_{xx} > 0$ Local min

at pt $(1,0)$ f has local max Value $f = 7$

$(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,0)$ are saddle pts.

at pt $(-1,1)$ f has Local min Value $f = 2$

" " $(-1,-1)$ f " " " " $f = 2$

سؤال سنوات 2017

Find the critical points of the function $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$. Then use the second Derivative Test to determine whether they are local minima, local maxima, or saddle points (or state that the test fails).

Solution:

* سؤال السنوات لا تقل علامته عن 8 علامات.

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^3.$$

$$f_x = 3x^2 - y = 0 \rightarrow 3x^2 = y$$

$$f_y = -x + 3y^2 = 0 \rightarrow x = 3y^2$$

$$\rightarrow 3(3y^2)^2 = y$$

$$27y^4 = y$$

$$27y^4 - y = 0$$

$$y(27y^3 - 1) = 0$$

$$\boxed{y=0} \qquad 27y^3 = 1$$

$$y^3 = \frac{1}{27}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{y=0} \quad \& \quad \boxed{y = \frac{1}{3}}$$

$$x = 3y^2 \rightarrow y = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$$

$$y = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

* $f_{xx} = 6x$

$f_{yy} = 6y$

$f_{xy} = -1$

(x_0, y_0)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$D = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2$
$(0,0)$	0	0	-1	$-1 < 0$ saddle pt
$(0,\frac{1}{3})$	0	2	-1	$-1 < 0$ saddle pt
$(\frac{1}{3},0)$	2	0	-1	$-1 < 0$ saddle pt
$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	2	2	-1	$3 > 0$, $f_{xx} > 0$ Local min

at pt $\boxed{(0,0)}$ $f=0$ are saddle pts.

$(0,\frac{1}{3}) \rightarrow f = \frac{1}{27}$

$(\frac{1}{3},0) \rightarrow f = \frac{1}{27}$

$\boxed{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})} \rightarrow f = \frac{1}{27} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$

$f = -\frac{1}{27}$

14.8 Lagrange Multpliores Method :-

→ Lagrange problem :-

[1] Maximize (and /or) minimize $f(x,y)$ subject to the constraint $g(x,y)=0$

[2] Maximize (and /or) minimize $f(x,y,z)$ subject to the constraint $g(x,y,z)=0$

بيبلش من ~~...~~ الحكي الفاضي إلي فوق وركز معي

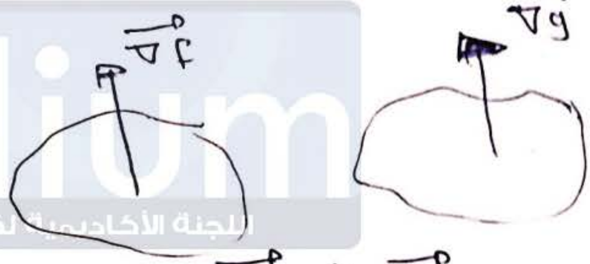
حل فاكرة Lagrange بنستخدمو لما يكون ~~...~~ طالب بالسؤال

(Extreme Value) القيم القصوى ← عظمى / صغرى

ولما يكون عندي بالسؤال ... $f(x,y)=$ ← اقتران

$f(x),(y)=0$ ← معادلة

* Lagrange بنستخدم ← اقتران / معادلة



$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \rightarrow \lambda \neq 0$$

λ ← رمز Lagrange

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla} f = \alpha \vec{\nabla} g$$

α ← (ثابت)

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\, g(x) \\ f(y) &= \lambda\, g(y) \\ f z &= \lambda\, g(z) \end{aligned}$$

هاد أهم شي لازم تعرفو بالـ Lagrange

مشتقة الاقتران ← f ، مشتقة المعادلة ← g

* خطوات حل سؤال الـ Lagrange :-

[1] مشتقة الاقتران بالنسبة لـ x = λ مشتقة المعادلة بالنسبة لـ x

" " د y " = λ " " د y "

" " د z " = λ " " د z "

[2] تعويض قيم x, y, z في المعادلة لإيجاد Extreme Values

Ex: Find the Extreme values of the

$$\underbrace{F(x,y) = x^2 + 2y^2}_{\text{اقتران}} \text{ subject to } \underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\text{عبارة عن معادلة}}.$$

أستخدم Lagrange

مشتقة الاقتران بالنسبة لـ x — مشتقة المعادلة الثانية لـ x

$2x = \lambda\, 2x \xrightarrow{1} x = \lambda x \longrightarrow x - \lambda x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$ OR $\boxed{\lambda = 1}$

$4y = \lambda\, 2y \xrightarrow{2} 2y = \lambda y \longrightarrow 2y - \lambda y = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$, $\boxed{\lambda = 2}$

& $x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow (3)$

$\boxed{x = 0}$ عوض في (3): $(0)^2 + y^2 = 1 \longrightarrow \boxed{y = \pm 1}$

$\boxed{y = 0}$ $x^2 + (0)^2 = 1 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

$\boxed{\lambda = 1} \xrightarrow{(2)} 2y - y = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$

$\boxed{\lambda = 2} \xrightarrow{(1)} x - 2x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$

(x_0, y_0)	$F(x,y) = x^2 + 2y^2$
$(0,1)$	$\boxed{2}$
$(0,-1)$	$\boxed{2}$
$(1,0)$	$\boxed{1}$
$(-1,0)$	$\boxed{1}$

$\longrightarrow$ the max at $(0,1)$ & $(0,-1)$

$\longrightarrow$ the min at $(1,0)$ & $(-1,0)$

Ex: Find the extreme value for $f(x,y) = e^{-xy}$ over $x^2+4y^2 \le 1$.

الحل:

(I) $x^2+4y^2 < 1 \rightarrow$ يعني لازم أطلع النقاط الحرجة & $x^2+4y^2=1$ boundary (الحدود)

(I) critical point :-

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -y e^{-xy} = 0 \rightarrow \boxed{y=0} \\ f_y &= -x e^{-xy} = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}\right] \rightarrow \boxed{(0,0)} \text{ critical pt}$$

(II) Boundary :-

$-y e^{-xy} = \lambda 2x \rightarrow (1)$

$-x e^{-xy} = \lambda 8y \rightarrow (2)$

& $x^2+4y^2=1 \rightarrow (3)$

قسمهم على بعض لأنو كل معادلة فيها 3 متغيرات

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \Rightarrow \frac{y}{x}\frac{\cancel{e^{-xy}}}{\cancel{e^{-xy}}} = \frac{\cancel{\lambda} 2x}{\cancel{\lambda} 8y}$$

$$\rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{4y} \Rightarrow \boxed{x^2 = 4y^2} \rightarrow \text{عوضنا في (3)}$$

$$\rightarrow x^2+4y^2=1$$

$$x^2+x^2=1 \rightarrow 2x^2=1$$

$$\boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt2}}$$

خذ واحدة منهم لأنهم نفس القيم

$$\left[\begin{aligned} y &= \pm\frac{1}{2\sqrt2} \leftarrow x^2=4y^2 \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt2} \\ y &= \pm\frac{1}{2\sqrt2} \leftarrow x^2=4y^2 \leftarrow x=-\frac{1}{\sqrt2} \end{aligned}\right.$$

(x_0,y_0)	$f(x,y)=e^{-xy}$	
$(0,0)$	$e^0=1$	
$(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{2\sqrt2})$	$e^{-\frac14}$	mini
$(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{2\sqrt2})$	$e^{\frac14}$	Max
$(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{2\sqrt2})$	$e^{\frac14}$	Max
$(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{2\sqrt2})$	$e^{-\frac14}$	mini

Ex:- Find the point on the sphere $x^2+y^2+z^2=36$ that are closest to & farthest from pt $(1,2,2)$.

صغرى   عظمى

فكرة السؤال :-

بدو نقطة على sphere والسؤال ع يحل على Lagrange فلازم أكون اقتران بالأول والسؤال نفسه معطيني معادلة.

*Distance Function:-

$$D=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$$

وبع الطرفين

$$D^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$$

$$F(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 \longrightarrow \text{هاد هوة الأقتران}$$

هيك صار سؤال Lagrange عادي زي ما تعلمنا قبل.

1) $F_x=\lambda g_x$

$$2(x-1)=\lambda 2x \rightarrow x=\frac{1}{1-\lambda}$$

$$2(y-2)=\lambda 2y \rightarrow y=\frac{2}{1-\lambda}$$

$$2(z-2)=\lambda 2z \rightarrow z=\frac{2}{1-\lambda}$$

& $x^2+y^2+z^2=36$

عوضهم بالمعادلة

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{4}{(1-\lambda)^2}+\frac{4}{(1-\lambda)^2}=36$$

$$\frac{9}{(1-\lambda)^2}=36 \rightarrow (1-\lambda)^2=\frac{1}{4}$$

$\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$ $\boxed{\lambda=\frac{3}{2}}$

$$\lambda=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \rightarrow y=\frac{2}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{y=4}$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \rightarrow z=\frac{2}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{z=4}$$

$\lambda = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{x = -2}$

$\lambda = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{2}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{y = -4}$

$\lambda = \frac{3}{2} \rightarrow z = \frac{2}{1-\lambda} \rightarrow \boxed{z = -4}$

عوضنا بالاقتران الأصلي

$P_1(2, 4, 4)$ & $P_2(-2, -4, -4) \rightarrow f(-2,-4,-4) = (-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2$

$= 81$

$\therefore P_2(-2, -4, -4)$ $\boxed{\text{farthest point}}$

$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$f(2, 4, 4) = (1)^2 + (2)^2 + (2)^2$

$= 9 \rightarrow P_1(2, 4, 4)$ $\boxed{\text{closest point}}$

Note :- لو كان طالب مسافة بالسؤال

$D^2 = 9 \rightarrow \boxed{D = 3}$

$D^2 = 81 \rightarrow \boxed{D = 9}$

Ex:- Find the point on the plane $x - y + z = 4$ that is closest to point $(1, 2, 3)$.

Function $\rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = f(x, y, z)$ * نفس السؤال الي قبلو ما بختلفو بأي شي.

equ $\rightarrow x - y + z = 4$

$2(x-1) = \lambda \rightarrow x = \frac{\lambda}{2} + 1$

$2(y-2) = -\lambda \rightarrow y = -\frac{\lambda}{2} + 2$

$2(z-3) = \lambda \rightarrow z = \frac{\lambda}{2} + 3$

Lag Equ $x - y + z = 4$

عوضهم بالمعادلة $x - y + z = 4$

$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + \frac{\lambda}{2} - 2 + \frac{\lambda}{2} + 3 = 4$

$\boxed{\frac{3\lambda}{2} = 2} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{3}}$

$P\left(\frac{10}{6}, \frac{8}{6}, \frac{22}{6}\right)$ #

Ex: - Find the minimum and maximum values of the function

سؤال سنوات 2017

$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ subject to the constraint $xy = 6$.

* نفس الأسئلة إلي حلناها لأنه عندي معادلة واقتران فلازم استخدم lagrange.

Lagrange:

$8x = \lambda y \rightarrow (1)$

$18y = \lambda x \rightarrow (2)$

& $xy - 6 = 0 \rightarrow (3)$

قسمة $\frac{2}{1}$ $\quad \frac{18y}{8x} = \frac{\lambda x}{\lambda y}$

$18y^2 = 8x^2$

$x^2 = \frac{18}{8} y^2$

$x = \sqrt{\frac{18}{8}}\, y \rightarrow x = \frac{\sqrt{2\times 9}}{\sqrt{2\times 4}}\, y$

$x = \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\, y$

$\boxed{x = \frac{3}{2} y}$

* $xy = 6$

$x = \frac{3}{2} y \rightarrow \frac{3}{2} y \cdot y = 6$

$\frac{3}{2} y^2 = 6$

$3y^2 = 12 \rightarrow y^2 = 4$

$\boxed{y = 2}$ $\boxed{y = -2}$

$x = \frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2}) \rightarrow \boxed{x = 3}$

$x = \frac{3}{2}(-2) \rightarrow \boxed{x = -3}$

(x_0, y_0)	$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$
$(3,2)$	$f(3,2) = 4(3)^2 + 4(2)^2 = 36 + 36 = 72 \rightarrow$ max
$(3,-2)$	$f(3,-2) = 72 \rightarrow$ max
$(-3,2)$	$f(-3,2) = 72 \rightarrow$ max
$(-3,-2)$	$f(-3,-2) = 72 \rightarrow$ max.

نختار النقطتين فقط $P_1(3, 2)$
$P_1(-3, -2)$

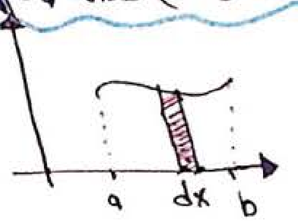
#

ch 5 : Multiple Integrals :-

هاد الشابتر بجي منه عالأقل علامة بال Final (25 - 20)

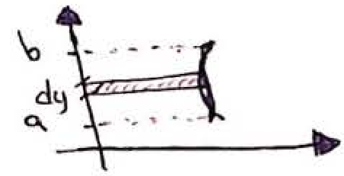
* Single Integral :-

* $\int_a^b F(x) \cdot dx \longrightarrow (a,b) \in R$



OR

* $\int_a^b F(y) \cdot dy \longrightarrow (a,b) \in R$



* Double Integral :-

$$\iint_R F(x,y) \cdot \underbrace{dA}_{dy\,dx \text{ OR } dx\,dy}$$

OR $\rightarrow \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} F(x,y) \cdot dy\,dx$ → بالترتيب حسب حدود التكامل *

OR $\rightarrow \int_{y=a}^{y=b}\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} F(x,y) \cdot dx\,dy$ → بالترتيب حسب حدود التكامل *

R → حدود التكامل * تكون مجال الاقتران.

* المهم في هذا الشابتر أسئلة Double Integral

وراح نقسم أسئلة الـ D.Int إلى قسمين :

Double Integral

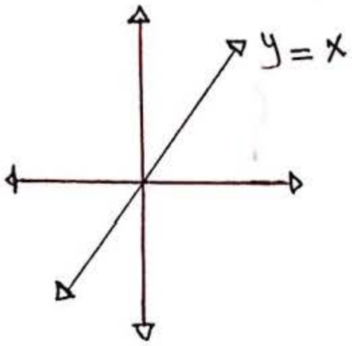
* أسئلة بكون حلها مباشرة وبنفس الوقت إلي جوا التكامل بتكامل حسب قواعد التكامل *

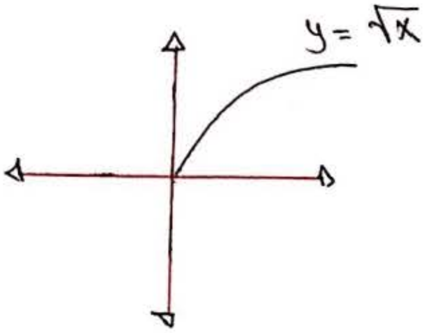
مهم

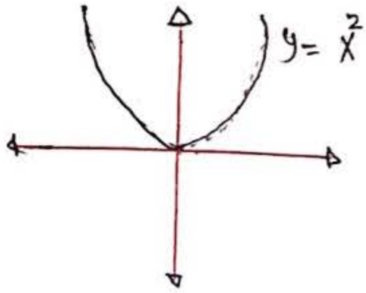
* أسئلة غير مباشرة

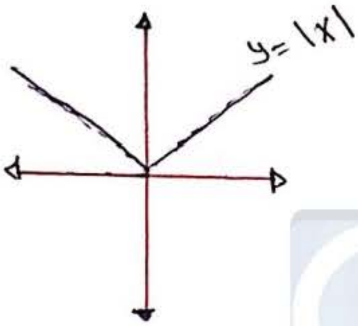
يعني إلي جوا التكامل ما بتكامل معي وفي هاي الحالة ~~[illegible]~~ بنكون بحاجة أنو أعكسها Revers Integral عشان أقدر أكاملها.

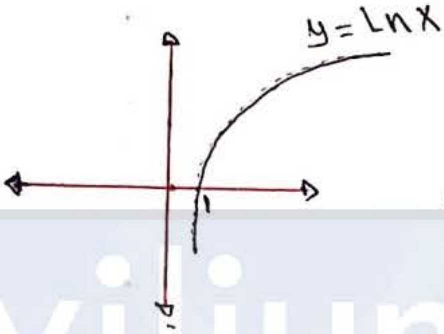
* حدود الرسمات لازم تكون عارفها وحافظها منيح عشان تعرف ترسم حدود التكامل.

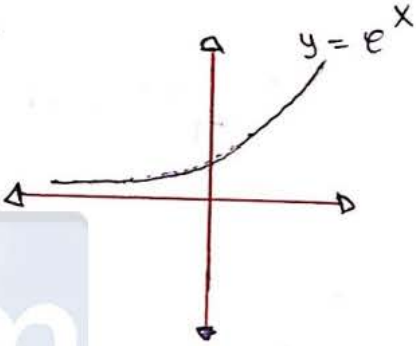


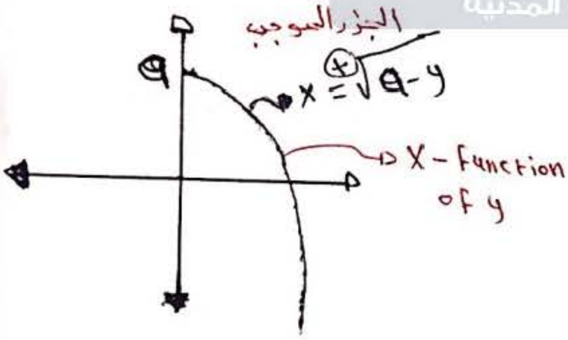




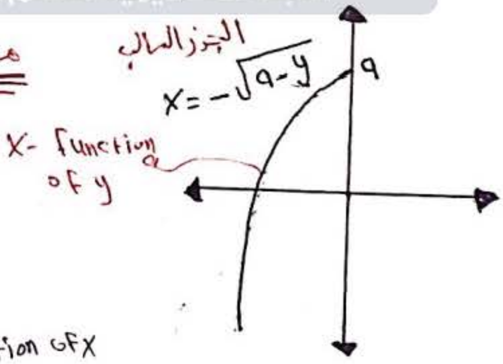




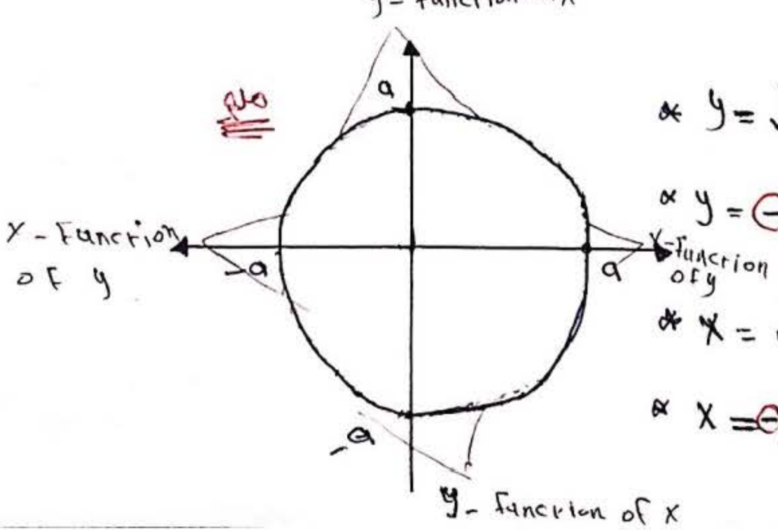




مهم



مهم



* $y = \sqrt{a - x^2}$ → * النصف العلوي للدائرة

* $y = -\sqrt{a - x^2}$ → * النصف السفلي للدائرة

* $x = \sqrt{a - y^2}$ → * النصف اليمين للدائرة

* $x = -\sqrt{a - y^2}$ → * النصف اليسار للدائرة.

Ex: ①

$$\int_0^5 \int_1^x x \cdot y \cdot dy \cdot dx$$

تكامل بالنسبة لـ y أولاً

• مثال مباشر لأن ما داخل التكامل يتكامل وحدود التكامل ثوابت وليس اقترانات يسهل تكاملها.

ثابت بالنسبة لـ y

$$\int_0^5 x \frac{y^2}{2} \Big|_1^x \cdot dx$$

$$\int_0^5 \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} \, dx$$

$$\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^5 = \left[\frac{5^4}{8} - \frac{5^2}{4}\right] - \left[\frac{0}{8} - \frac{0}{4}\right] = \frac{63}{8}$$

Ex: ②

$$\iint_R 4 + x^2 + y^2 \cdot dA \quad , \quad R - \underbrace{[-1, 1]}_{x} \times \underbrace{[0, 2]}_{y}$$

Solution:

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=-1}^{x=1} 4 + x^2 + y^2 \cdot dx \, dy$$

تلتزم بالترتيب

$$\int_0^2 4x + \frac{x^3}{3} + y^2 x \Big|_{-1}^{1} dy$$

$$\int_0^2 \left[4 + \frac{1}{3} + y^2\right] - \left[-4 - \frac{1}{3} - y^2\right] dy$$

$$\int_0^2 8 + \frac{2}{3} + 2y^2 \, dy$$

$$8y + \frac{2}{3}y + 2\frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = \left[16 + \frac{2}{3}(2) + \frac{2}{3}(8)\right] - [0] = \frac{68}{3}$$

Ex ③:

$$\iint_R \cos(x+y) \, dA \quad . \quad R = \{x, y\} \left\{0 \le x \le \pi , 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

الحل

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) \cdot dy \cdot dx \quad \text{OR } dx \cdot dy$$

هيك صح

وهيك صح

$$= \int_0^{\pi} -\sin(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot dx = \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \left[\cos\pi - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right] - \left[\cos(0) - \cos\frac{\pi}{2}\right] = -2$$

$\boxed{4}\ \int_1^4\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot dy\, dx$ $\quad * \int \frac{2}{x} \cdot dx$

مشتقه فوق منه

$\int_1^4 \underbrace{x \ln y}_{\text{مشتقه فوق منه}} + \frac{y^2}{2x} \Big|_1^2 dx$ $\quad 2\ln|x| + c$ ماداالحكي عالكولس $\frac{1}{\equiv}$

$\int_1^4 \left[x\ln 2 + \frac{2}{x}\right] - \left[\underbrace{\cancel{x\ln 1}}_{zero} + \frac{1}{2x}\right] dx$

$\int_1^4 x\ln 2 + \frac{3}{2x} \cdot dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln 2 \Big|_1^4 + \frac{3}{2}\ln x \Big|_1^4$ $\quad \ln 1 = zero$

$= \left[8\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2\right] + \left[\frac{3}{2}\ln 4 - \underbrace{\cancel{\frac{3}{2}\ln 1}}_{zero}\right]$

$= \frac{21}{2}\ln 2$

$\boxed{5}\ \int_0^2\int_0^{\pi} r\sin^2\theta\ d\theta \cdot dr$ $\quad * \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

متطابقة للتكامل $\quad * \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$\int_0^2\int_0^{\pi} r\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \cdot d\theta \cdot dr$

$\int_0^2 \frac{r\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^{\pi} \cdot dr \Rightarrow \int_0^2 \left(\frac{\pi r}{2} - 0\right) \cdot dr \rightarrow \frac{\pi r^2}{4}\Big|_0^2 = \pi$

$\boxed{6}\ \int_0^3\int_0^1 \underbrace{6x^2}_{\text{ثابت بالنسبة لـ } y} \cdot y^3 - 5y^4 \cdot dy \cdot dx$

$\int_0^3 6x^2\frac{y^4}{4} - \cancel{5}\frac{y^5}{\cancel{5}} \Big|_0^1 \cdot dx$

$\frac{6}{4}\frac{x^3}{3} - x \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 3 = \frac{21}{2}$ #

* هاد النوع التاني حوه أسئلة
Reverse Integral → قلب حدود التكامل *

Ex :- Reverse the order of Integration :-

$$\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=\ln x} F(x,y)\,.dy.dx$$

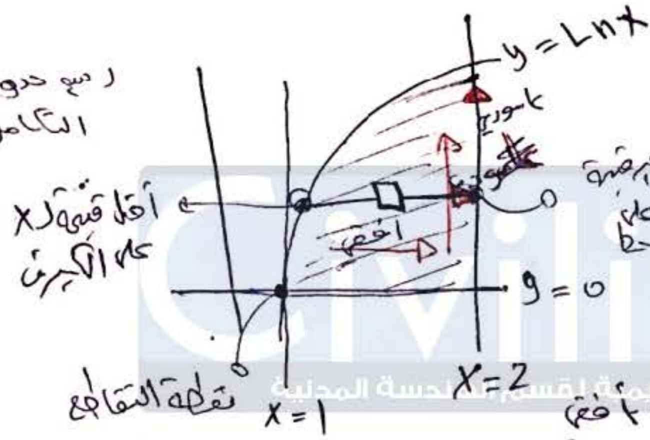
عمودي ← ، أفقي ←

* في هاد النوع من الأسئلة بكون السؤال واضح مثل هيك ← وبحكيلك حسب نص السؤال هاد وعلى الأغلب ما بكون حكيلك اشي بحدود التكامل وأنت لحالك لازم تعرف أنو بدو Reverse.

* خطوات حل أسئلة Reverse Integral :-

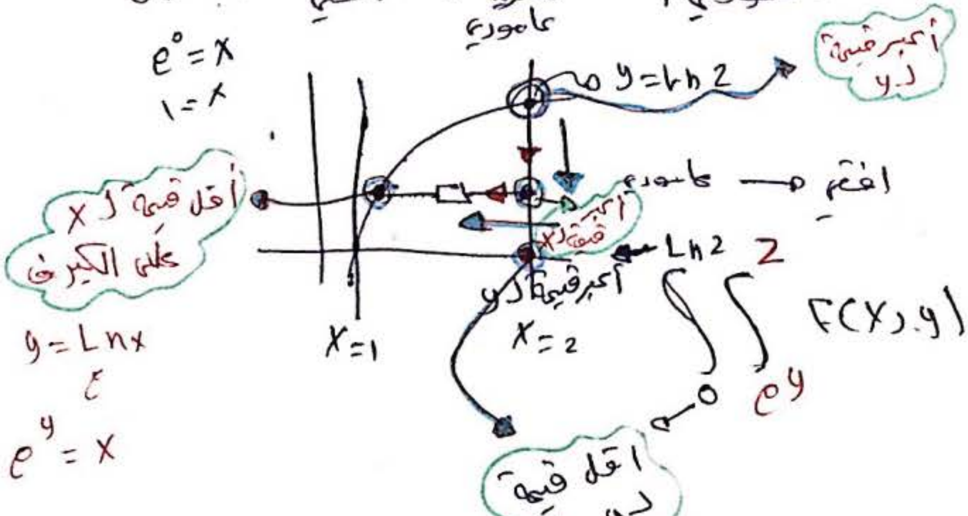
1) رسم حدود التكامل.
2) تحديد منطقة التكامل.
3) إذا كان ماشي بالسؤال عمودي ← أفقي
بمشي عكسه تماماً أفقي ← عمودي.

1) ← رسم حدود التكامل



$y = \ln x$
$0 = \ln y$
$e^0 = x$
$1 = x$

أفقي ← عامودي

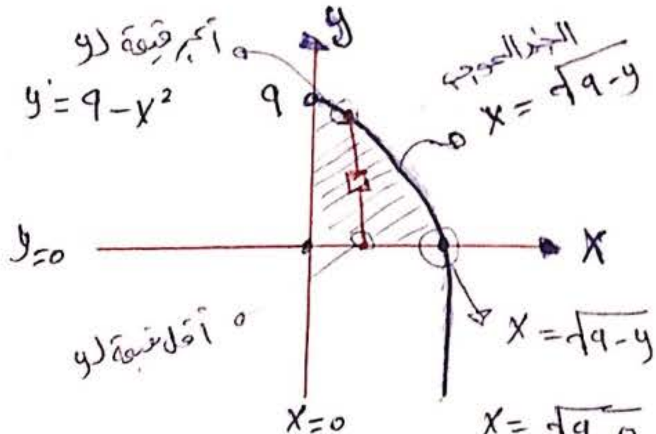


$y = \ln x$
$e^y = x$

$$\int_{0}^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} F(x,y)\,.\,dx\,dy$$

② $$\int_{y=0}^{y=9}\int_{x=0}^{x=\sqrt{9-y}} F(x,y)\cdot dx\,dy$$

عامودي ⟶ أفقي



$x=\sqrt{9-0}$

$x=3$

الحل

أكبر قيمة x

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-x^2} F(x,y)\cdot dy\,dx$$

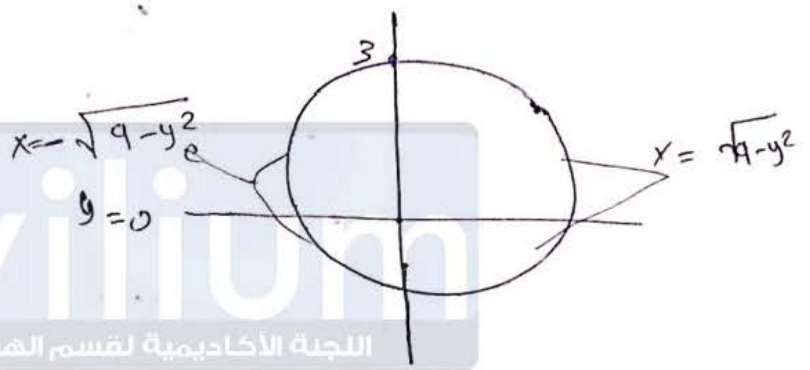
أقل قيمة x

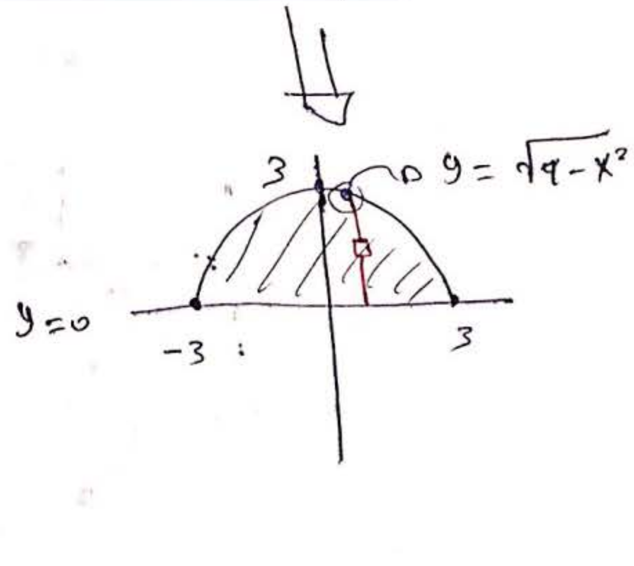
افقي ⟶ عامودي

---

③ $$\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{+\sqrt{9-y^2}} F(x,y)\cdot dx\,dy$$

عامودي ⟶ أفقي





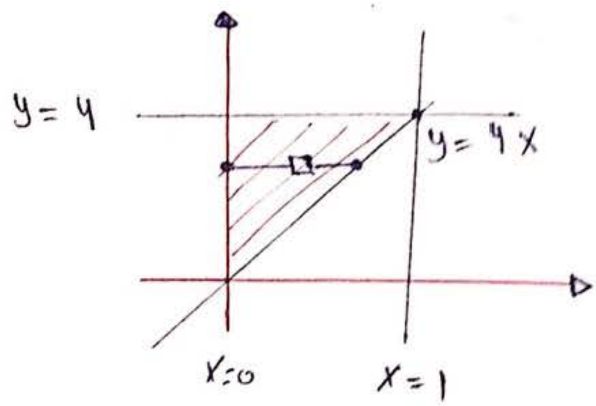
$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} F(x,y)\cdot dy\,dx$$

افقي ⟶ عامودي

[4] Revers the order of integration :-

* $\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=4x}^{y=4} f(x,y)\,.\,dy\,dx$

عامودي ← أفقي



الحل : $\int_0^4\int_0^{\frac{y}{4}} f(x,y)\,dx\,dy$

أفقي ← عامودي

Ex : Evaluate :-

صعب

[1] $\int_0^1\int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy.$

Problem

* لما يكون عندي جوا التكامل $\left.\begin{array}{l} e^{x^2} \\ \sin x^2 \\ \cos x^2 \end{array}\right\}$ لا تتكامل بالنسبة لـ x

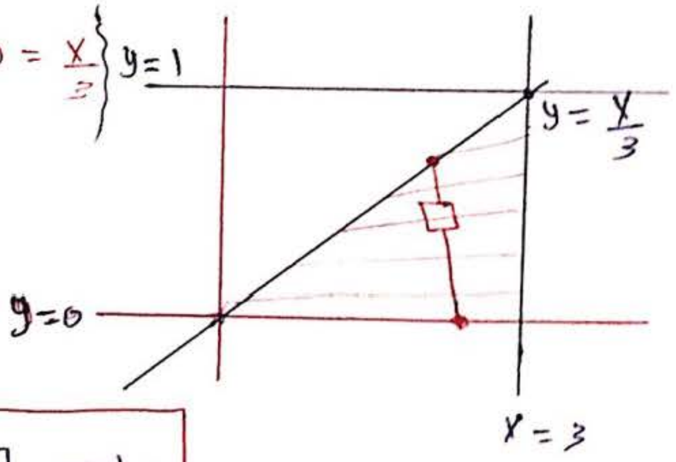
فالأسهل أني أكاملها بالنسبة لـ y عشان تصير ثابت فلازم أعمل للتكامل Revers.

$= \int_0^3\int_0^{\frac{x}{3}} \underbrace{e^{x^2}}_{\text{ثابت بالنسبة لـ y}}\,dy\,dx$

$x = 3$

$x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3}$ عشان ارسمها صح

$y = 1$



$= \int_0^3 e^{x^2}\left(\frac{x}{3} - 0\right).\,dx$

$\frac{1}{3}\int_0^3 x e^{x^2}\,.\,dx$ يحل تعويض

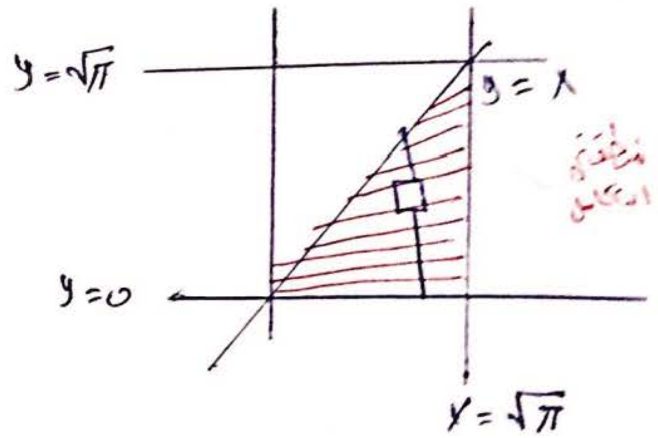
$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ dx = \frac{du}{2x} \\ x = 3 \rightarrow u = 9 \\ x = 0 \rightarrow u = 0 \end{array}\right.$ بدل حدود التكامل

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^9 e^u\,.\,du$

$\frac{1}{6}\left[e^u\Big|_0^9 = \frac{1}{6}\left[e^9 - e^0\right]\right.$

$= \frac{1}{6}\left[e^9 - 1\right]$ #

[2] $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}}\int_{y=x}^{x=\sqrt{\pi}} \underbrace{\cos x^{2}}_{\text{لا تتكامل}}\, dx \, dy$



الحل :

$$\int_{0}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} \cos x^{2}\, dy \, dx$$

$$\int^{\sqrt{\pi}} \cos x^{2}\, \underbrace{[x-0]}_{\text{طول فترة التكامل}} \, dx$$

$$\int_{0}^{\sqrt{\pi}} \underbrace{x \cos x^{2}}_{\text{تعويض}} \, dx$$

$u = x^{2}$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$x=\sqrt{\pi} \longrightarrow u=\pi$

$x=0 \longrightarrow u=0$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos u \, du$$

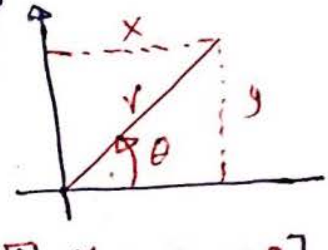
$$\frac{1}{2}\Big[\sin u \Big|_{0}^{\pi} = 0 \quad \#$$

[3] $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^{2}}} \sin(x^{2}+y^{2})\, dy\, dx$

* في هاد السؤال عندي $\sin(x^2+y^2)$ لا تتكامل لأن الزاوية ليست خطية و خاصية Reverse مش راح تفيدني فعشان هيك أول ما نشوف جوا التكامل x^2+y^2 نحله على Polar.

حل السؤال على الصفحة التالية

تذكير بقواعد الـ Polar



[1] $x = r\cos\theta$

[2] $y = r\sin\theta$

[3] $r^{2} = x^{2}+y^{2}$

[4] $\tan\theta = \frac{x}{y}$

* كل هاي القوانين طالعين من الرسمة *

Scanned by CamScanner

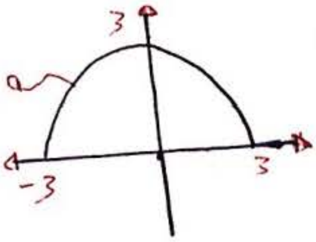
$$\int_{x=-3}^{x=3}\int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

* عشان ارسم صح

$y=\sqrt{9-x^2}$

$\boxed{\text{ربع الطرفين}}$ $y^2 = 9 - x^2$

$r^2 = 9 \longleftarrow x^2+y^2=9 \to$ دائرة نصف قطرها $\underline{\underline{3}}$



فقط النصف العلوي للدائرة لأن الجذر موجب

والحد الثاني هو $\underline{\underline{zero}}$

$y=0 \longrightarrow y=\sqrt{9-x^2}$

حول لـ Polar system

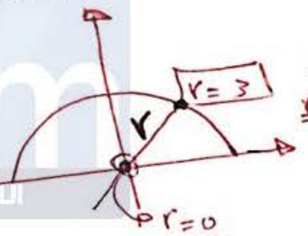
$x^2+y^2=9$

$\downarrow$

$r^2=9$

$r=\pm 3$

$\boxed{r=3}$



الحل　　مهم

$$\int_0^{\pi}\int_0^{3} \sin r^2 \cdot \underline{\underline{dA}}$$

$\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$ حفظ مهم

حدود θ　　حدود r

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sin r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} r\sin r^2 \cdot dr\,d\theta$$

تعويض

$u = r^2$

$\frac{du}{dr} = 2r$

$dr = \frac{du}{2r}$

$r=3 \to u=9$

$r=0 \to u=0$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{9} \cancel{r}\sin u \frac{du}{2\cancel{r}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} -\cos u \Big|_0^9 \, d\theta = \frac{1}{2}\left[-\cos 9 - 1\right]\overbrace{\left[\pi - 0\right]}^{\text{طول الفترة}} = -\frac{\pi}{2}(\cos 9 - 1) \;\#$$

Ex: convert to Polar:

مهم

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

* ملاحظة في هذا السؤال معطيني إياها بدلالة $\boxed{\text{Cartisen}}$ و حكالي حولي إياه لـ Polar .

$\boxed{\text{الحل}}$

$y = \sqrt{2x - x^2}$

$y^2 = 2x - x^2$

$x^2 - 2x + y^2 = 0 \longrightarrow$ للتحول إلى Polar .

أكمال مربع

$x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 = 0$

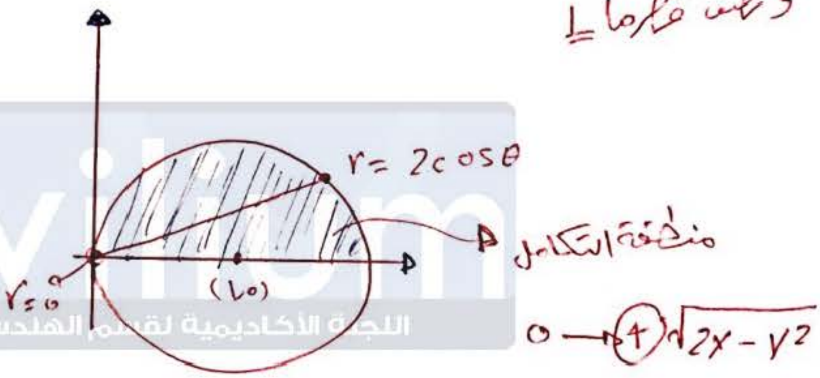
$(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1

$\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} - 2x = 0$

$r^2 = 2x$

$\cancel{r^2} = 2\,\cancel{r}\cos\theta$

$\boxed{r = 2\cos\theta}$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{\cancel{r^2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} 1 \cdot dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)(2\cos\theta - 0)\cdot d\theta$$

$$2\sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - 0] = 2$$

Exercise :- * سؤال كتاب *

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \underbrace{e^{\sin\theta}}_{\text{ثابت}} \cdot dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin\theta} \underbrace{[\cos\theta - 0]}_{\text{طول الفترة}} \, d\theta$$

[redacted]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, e^{\sin\theta} \cdot d\theta$$

* افرض الأس (تعويض) [redacted]

$u = \sin\theta$

$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$

$d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$

$\theta = 0 \rightarrow u = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$

$$\rightarrow \int_0^1 \cancel{\cos\theta}\, e^u \cdot \frac{du}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$= e^u \Big|_0^1 = e^1 - 1 \quad \#$$

Exercise :- * سؤال كتاب *

$\iint_D e^{-x^2-y^2} \cdot dA \rightarrow$ where D is the region bounded by the semicircle $x = \sqrt{4-y^2}$ & y-axis.

$-x^2-y^2 \rightarrow -r^2$

semicircle → تعني نصف دائرة

$x = \sqrt{4-y^2}$ → x - function of y → جذر موجب والنصف اليمين من الدائرة

Solution :-

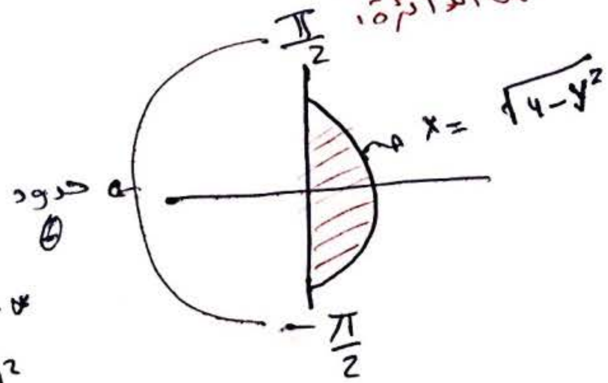
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2} \cdot r\, dr\, d\theta$$

افرض الأس [redacted] تعويض

0 → دائمًا من zero

كمل الحل

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e^4} \quad \#$$



* حدود r *

$x' = \sqrt{4-y^2}$

$x^2 = 4 - y^2$

$x^2 + y^2 = 4$

$r^2 = 4 \rightarrow \boxed{r = 2} \rightarrow$ دائمًا موجب

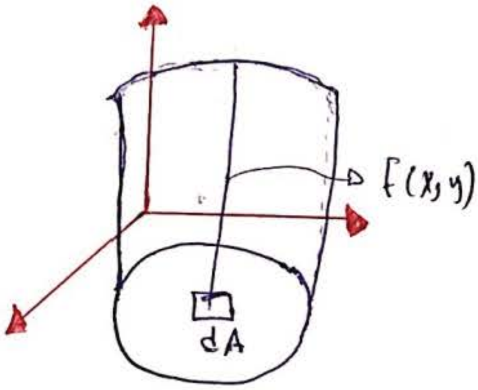
* حل السؤال بال Polar اسهل.

applications of double Integral :-

[1] Area : $A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$

$\text{OR} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$

[2] Volume : $V = \iint_R \underbrace{F(x,y)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dA}_{\text{المساحة}}$

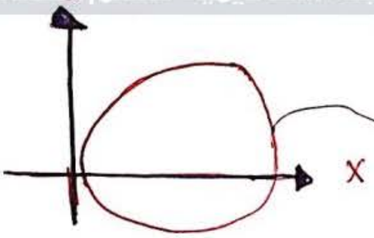


* رسمات مهمة للازم تكون عارفها

* التركيز *

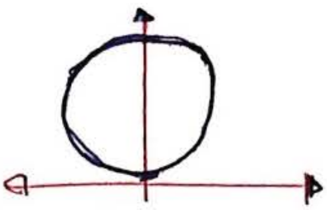
هاد الإشي حكيناه عالكولس Z والمفروض أنك عارفه

* $\boxed{r = a\cos\theta} \xrightarrow{\text{دائرة}}$

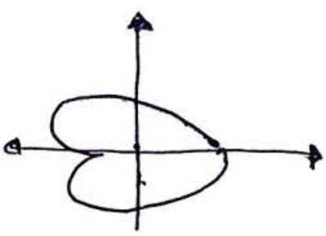


دائرة على محور السينات الموجب

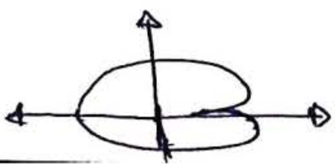
* $\boxed{r = a\sin\theta} \xrightarrow{\text{دائرة}}$



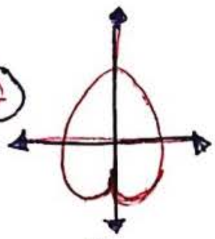
* $r = a + \cos\theta \longrightarrow$ قلب حب



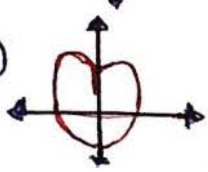
* $r = a - \cos\theta \longrightarrow$



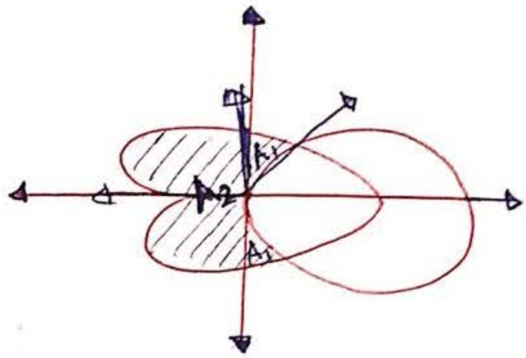
* $r = a + \sin\theta$



* $r = a - \sin\theta$



Ex: Find the area inside (داخل) the cardiod (قلب حب) $r = 1 + \cos\theta$ outside (خارج) the circle (دائرة) $r = 3\cos\theta$, Using double Integral.



$$A_1 = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} \overbrace{r \cdot dr \cdot d\theta}^{dA}$$

لأنو عندي منطقتين

$$A_2 = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{0}^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\theta$$

لأنو عندي منطقتين

نقاط التقاطع (point of intersection)

$r = 1 + \cos\theta$, $r = 3\cos\theta$

$r = r$

$1 + \cos\theta = 3\cos\theta$

$2\cos\theta = 1$

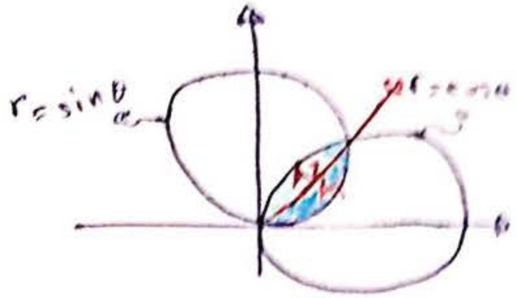
$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$A_T = A_1 + A_2$

$$= 2\left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{0}^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\theta \right]$$

Ex: The region within both of circle $r = \cos\theta$ & $r = \sin\theta$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sin\theta} r \, dr\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sin\theta} \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos\theta} \, d\theta$$

$r = r$

$\sin\theta = \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] - [0 - 0]\right] + \frac{1}{4}\left[\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]\right]$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad \#$$

Ex:- Find the volume of the solid bd by the plane $2x+3y+z=6$ & the coordinate planes $x=0$, $y=0$, $z=0$.

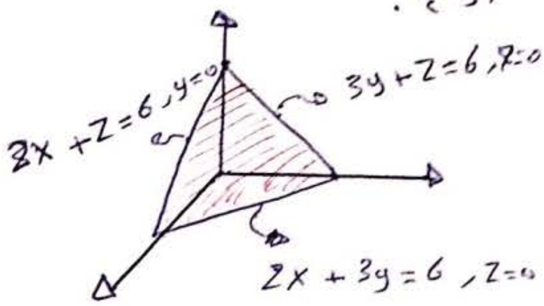
الحل $z = 6-2x-3y$, $z=0$

* أول خطوة في حل السؤال لازم أحدد الارتفاع Δz OR Δy OR Δx

$\Delta z = 6-2x-3y-0$

$$V=\int_0^3\int_0^{\frac{6-2x}{3}} \underbrace{6-2x-3y}_{\text{فرق الارتفاع}}\, dy\, dx$$

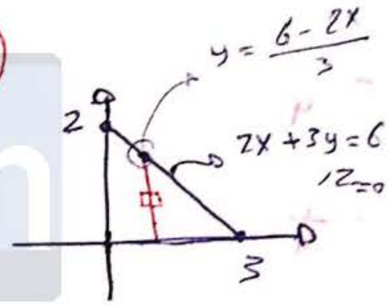
* ثاني خطوة لازم أطلع حدود التكامل فلازم ارسم .



OR

$$V=\int_0^2\int_0^{\frac{6-3y}{2}} 6-2x-3y \, dx\, dy$$

* خذ أي معادلة خط بس لازم انتبه انو فرق الارتفاع إلي طلعتو بدلالة x,y فعشان هيك راح أخذ معادلة الخط ماي $2x+3y=6, z=0$



$y=0 \rightarrow 2x=6$ $\boxed{x=3}$

$x=0 \rightarrow 3y=6$ $\boxed{y=2}$

* عامودي ← أفقي

* أفقي ← عامودي OR

Ex: find the volume of the solid bd by the plane $2x+3y+z=6$ & the coordinate planes & the plane $x+y=1$ parallel to z-axis.

$$V=\int_0^1\int_0^{1-y} 6-2x-3y\;dx\,dy$$

* أول خطوة بالحل حدد فرق الارتفاع ΔZ

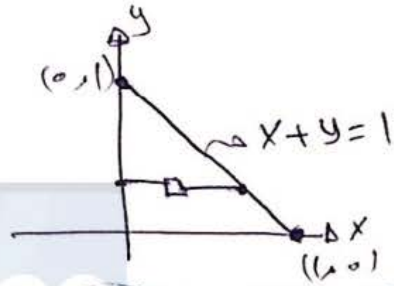
، طلع حدود التكامل

، ارسم الاقتران .

الحل : نص فكرة السؤال إلي متلو

مش لازم ألتزم بمعادلة ~~المنحنى~~ plane إلي معطيني

أياما عشان أطلع حدود التكامل ،



Ex: Find the volume bd by the paraboloid $z=x^2+y^2$ & $z=4-x^2-y^2$

فرق الارتفاع

1) Cartesian:

$$\Delta z = 4-x^2-y^2-(x^2+y^2)$$
$$= 4-2x^2-2y^2$$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4-2x^2-2y^2\;dy\,dx$$

راح يطلع الحل فالأسهل أني أحل على Polar

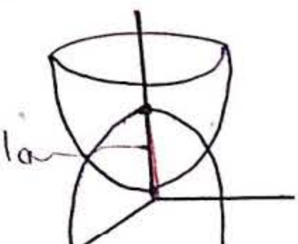
حدود التكامل

$z=z$

$4-x^2-y^2 = x^2+y^2$

$2x^2+2y^2=4$

$x^2+y^2=2 \rightarrow$ circle (دائرة)



2) Polar → الأسهل

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left[4-2r^2\right]r\,dr\,d\theta$$

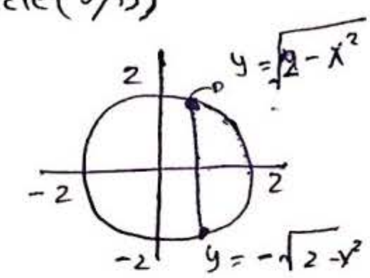
Polar:

$x^2+y^2=2$

$r^2=2$

$r=\pm\sqrt{2}$

$\boxed{r=\sqrt{2}}$



Ex: Find (V) under the paraboliod $Z = 3x^2 + y^2$ bd by the cylinder $x = y^2 - y$, Plane $y = x$ & above $\underbrace{x\text{-}y \text{ plane}}_{Z=0}$.

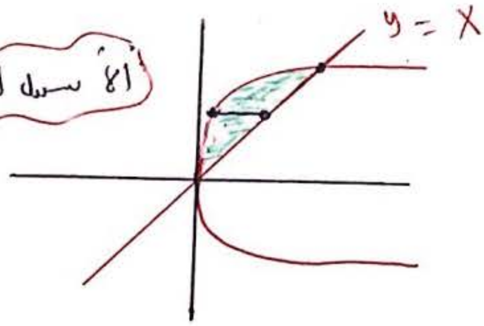
• هاد السؤال ما بزبط أحلو على Polar

لأنو عندي $\boxed{Z = 3x^2 + y^2}$ معامل y $\neq$ معامل x .

* الحل :

$$V = \int_{y=0}^{y=2} \int_{y^2 - y = x}^{y = x} \underbrace{[3x^2 + y^2 - 0]}_{\text{فرق الارتفاع}}$$

لأ سهل إني أمشي بالعرض



* حدود التكامل :

$x = x$

$y = y^2 - y$

$y^2 - 2y = 0$

$y(y-2) = 0$

$\boxed{y=0}$ $\boxed{y=2}$ $\longrightarrow$ * حدود $\underline{y}$

* حدود x من الرسمة .

Ex: Find (V) of solid under $Z = x^2 + y^2$ & above $\underbrace{xy\text{-plane}}_{Z=0}$ and inside the cylinder $x^2 + y^2 = 2x$.

* بما أنو عندي $x^2 + y^2$ بالسؤال فأكيد حل على Polar مع مراعاة أنو يكونو معاملاتهم متساوية .

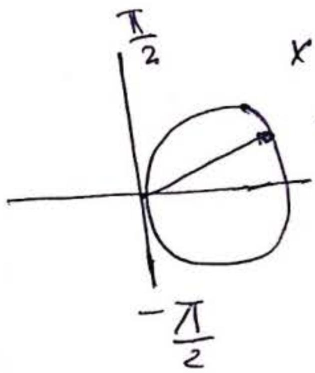
$\Delta Z = x^2 + y^2 - 0$

$\Delta Z = r^2 - 0$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\theta} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\theta} r^3 \cdot dr\,d\theta$$

كمل الحل



حدود التكامل : $x^2 + y^2 = 2x$

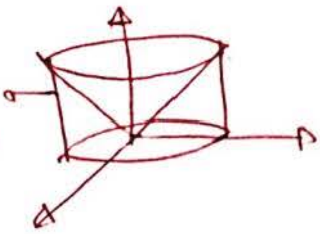
$r^{\cancel{2}} = 2\cancel{r}\cos\theta$

$r = 2\cos\theta$

Ex :- Find (V) under the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ & above the disk $x^2+y^2 \leq 4$.

cone

cylinder



جذر موجب
الجزء العلوي
cone لـ

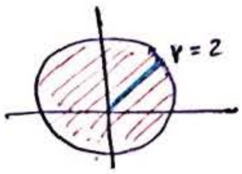
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{x^2+y^2}\; r \, dr\, d\theta$$

* الأسهل أني أحلو على polar

حدود التكامل ← $4 = x^2+y^2$

$r^2 = 4$

$\boxed{r = 2}$



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2 \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 \, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[2\pi - 0\right] = \frac{16\pi}{3}$$

Ex :- Find (V) ~~under~~ above the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ & below the sphere $x^2+y^2+z^2 = 1$.

* طبعاً الأسهل أني أحل على polar
مادام عندي x^2+y^2 بالسؤال
* بس لازم تنتبه على شغلة كثير مهمة
مين نا قص مين ← يعني مين فوق ومين تحت ،

الحل : $z^2 = 1-(x^2+y^2)$ & $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z^2 = 1 - r^2$ $\qquad z = r$

$z = \sqrt{1-r^2}$

$\Delta z = \sqrt{1-r^2} - r$ ← مهم

* دائماً اعتبر أنو sphere غطا لـ cone .

$\Delta z = $ sphere $-$ cone

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{1-r^2} - r\right] r \, dr\, d\theta$$

حدود التكامل

$z = z$

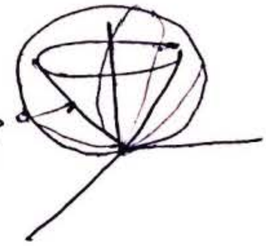
$r = \sqrt{1-r^2}$

$r^2 = 1 - r^2$

$2r^2 = 1$

$r^2 = \frac{1}{2}$ → $\boxed{r = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

يكمل الحل



جذر موجب
لا تنسى

Ex: Find (V) Enclosed by the hyperboloid $z^2-x^2-y^2=1$

& $z=2$.

$$\iint \Delta z \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$\iint \left[2-\sqrt{1+y^2+x^2}\right] r\,dr\cdot d\theta$$

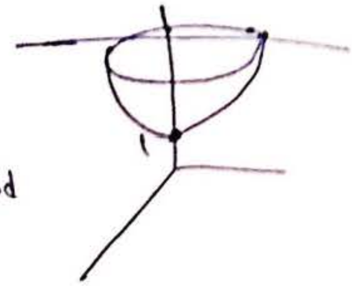
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(2-\sqrt{1+r^2}\right) r\,dr\,d\theta$$

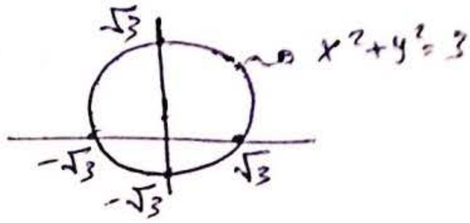
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 2r - r\sqrt{1+r^2}\;.dr\,d\theta$$

تعويض

مشتقة مع
عم

$$= \frac{4}{3}\pi$$





$z=2$

$\sqrt{1+y^2+x^2} = 4$ → ربع الطرفين

$1+y^2+x^2=4$

$x^2+y^2=3$

$r^2=3$

$\boxed{r=\sqrt{3}}$

Ex:- Find the volume bounded by the cylinder $y^2+z^2=4$ & the plane $y = \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{الارتفاع}}$, $x=0$, $z=0$ in the first octant.

* الربع الأول *

* أول خطوة لازم أحدد الارتفاع .

* ارسم الاقترانات .

* أطلع حدود التكامل .

الارتفاع

$\Delta x = 2y - 0$

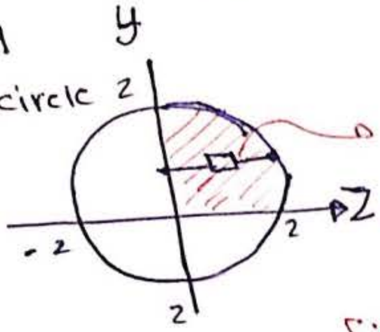
1) cartisen:-

$$V = \int_{y=0}^{y=2}\int_{0=z}^{\sqrt{4-y^2}=z} [2y-0]\, dz\, dy$$

كمل الحل

$y^2+z^2=4$

z-space → circle



منطقة التكامل لازم تكون بالربع الأول first octant

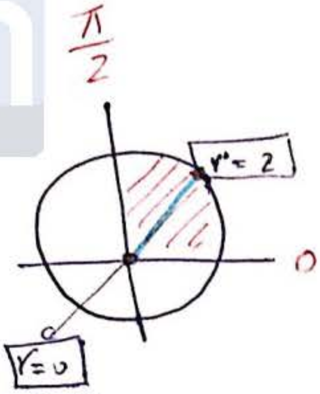
2) Polar :- → الأسهل

$$V = \iint_R [2y-0]\, r\, dr\, d\theta$$

$y^2+z^2=4$

$r^2 = 4$

$\boxed{r=2}$



دائماً

* مد خط من origin *

$\frac{\pi}{2}$ → ربع دورة

$y = r\sin\theta$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 [2(r\sin\theta)]\, r\, dr\, d\theta$$

دائماً صفر

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 2r^2\sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\left[0-(-1)\right]$$

$$= \frac{16}{3} \quad \#$$

15.6 :- Triple Integrals :- (مهم جداً جداً)

15.7

15.8

* coordinate system in 3-space :-

[1] Cartesion :-

i) احداثيات النقطة → $P(x, y, z)$

* $dV = dz\,dA \rightarrow$ مهم

$= dz\,dy\,dx$

OR $= dz\,dx\,dy$

$= dx\,dy\,dz$

* $$V = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,.\,\overbrace{dz\,dy\,dx}^{dv}$$

دائماً الحدود ثابتة

[2] cylindrical :- → (Polar بدل) → Double Integral.

i) احداثيات النقطة → $P(r, \theta, z_0)$, $r = \text{constant} \xrightarrow{\text{تعني}}$ cylinder

(ثابت)

$\theta = \text{constant} \rightarrow$ half - Plane (نصف Plane)

$z = \text{constant} \rightarrow$ Plane // xy plane (يوازي)

* $dv = dz\,dA \rightarrow$ مهم

$= dz\,r\,dr\,d\theta$

* $$V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(z, r, \theta) \,.\, \overbrace{dz\,r\,dr\,d\theta}^{dv}$$

* التحويل بينهما * والعكس

Cartesion ⟷ cylindrical

نستخدم القوانين التالية:

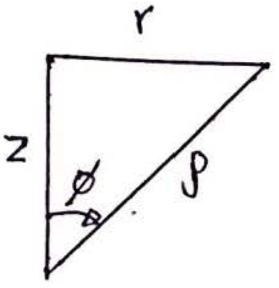
* $x = r\cos\theta$
* $y = r\sin\theta$
* $z = z_0$

* $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

3 Spherical :-

i) احداثيات النقطة → $P(\rho, \theta, \phi)$ (رو)

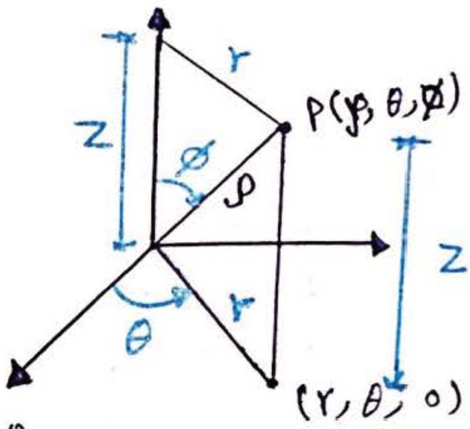
$\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ → مهم حفظ



1. $Z = \rho \cos\phi$
2. $r = \rho \sin\phi$
3. $\rho^2 = Z^2 + r^2$

   $\rho^2 = Z^2 + (x^2 + y^2)$
4. $\tan\phi = \dfrac{r}{Z}$

حفظ



cylindreal

* $x = r\cos\theta$ → spherical $x = \rho \sin\phi \cos\theta$ حفظ
* $y = r\sin\theta$ → spherical $y = \rho \sin\phi \sin\theta$

* spherical coordinate :- * حفظ *
* ρ = constant → sphere (تمثل معادلة sphere)
* θ = constant → half-plane
* ϕ → i) $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ → upper napper of cone (النصف العلوي لل cone)

  ii) $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ → lower (السفلي) " " ".

  iii) ϕ = zero → z-axis (+ve) (positive)

  $\phi = \pi$ → z-axis (−ve)

  $\phi = \frac{\pi}{2}$ → x-y plane

$dv = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ → حفظ زي اسمك يا غالي

Ex:- Identify this Surface:-

1. $z = r$

الحل $z = +\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ upper napper of cone — النصف العلوي لـ cone

↓ لا تنسى جذر موجب.

* لازم تكتب جميع المعادلات هاي بالصورة إلي بتعرفها، على عشان تعرف شو بتمثل.

2. $z = r^2$

الحل $z = x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloid

3. $\rho^2 = -\sec 2\phi$

الحل $\rho^2 = -\frac{1}{\cos 2\phi} \Rightarrow \rho^2 = -\frac{1}{\cos^2\phi - \sin^2\phi}$ متطابقة

$\rho^2\cos^2\phi - \rho^2\sin^2\phi = -1$

$z^2 - r^2 = -1$

$r^2 - z^2 = 1 \rightarrow x^2+y^2-z^2 = 1$

∴ hyperboloid of one-sheet

4. $\rho = \cos\phi \csc\phi^2$

الحل $\rho = \frac{\cos\phi}{\sin\phi^2} \rightarrow \rho\sin\phi^2 = \cos\phi$

ضرب الطرفين

$\rho^2 \cdot \sin\phi^2 = \rho\cos\phi \cdot \rho$

$r^2 = z$

$\boxed{x^2+y^2 = z} \rightarrow$ paraboloid #

Ex: $P(\underbrace{-\sqrt{3}}_{x}, \underbrace{-3}_{y}, \underbrace{-2}_{z})$ convert to spherical.

النقطة بالربع الثالث

* معطيك النقطة احداثياتها ب cartisen المطلوب انك تحولها إلى spherical.

الحل

$P(\rho, \theta, \phi)$

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = (-\sqrt{3})^2 + (-3)^2$

$r^2 = 3 + 9$

$r = \sqrt{12}$

$\longrightarrow \tan\phi = \frac{r}{z}$

$= \frac{\sqrt{12}}{-2} = \frac{\sqrt{3 \times 4}}{-2}$

$= \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{-2}} = -\sqrt{3}$

لأنها بالربع الثالث

$\tan\phi = -\sqrt{3}$

$\boxed{\phi = \frac{2\pi}{3}}$ $+\pi$

$\phi = \frac{4\pi}{3}$

2) $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= (-\sqrt{3})^2 + (-3)^2 + (-2)^2$

$\rho^2 = 3 + 9 + 4$

$\rho^2 = 16 \longrightarrow \boxed{\rho = 4}$

3) $\tan\theta = \frac{x}{y}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{-3} = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

$P(4, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

2) $P(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ بالربع الأول

$\rho = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2$

$\rho = 12 + 14 = 16$

$\boxed{\rho = 4}$

$\tan\phi = \frac{r}{z}$

$= \frac{\sqrt{1+3}}{2\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

$\boxed{\phi = \frac{\pi}{6}}$

$\longrightarrow (4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

3) $P(0, -1, -1)$

$r = 1$

* $\tan\phi = \frac{1}{-1} = -1$

$\boxed{\phi = 3\frac{\pi}{4}}$

* $\theta = \tan^{-1}(\frac{-1}{0}) \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi$

$= \tan^{-1}(\infty)$ $= 3\frac{\pi}{2}$

* $\rho^2 = (1)^2 + (1)^2$

$\rho = \sqrt{2} \longrightarrow P(\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

* convert to spherical :

1) $Z = -\sqrt{3x^2 + 3y^2}$

① الحل:

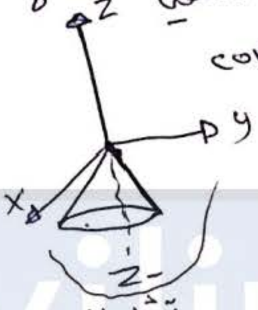
$Z = -\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$Z = -\sqrt{3}\, r$

$\cancel{\rho}\cos\phi = -\sqrt{3}\,\cancel{\rho}\sin\phi$

$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{6} \rightarrow$ تمثل الجزء السفلي لـ cone



② حل: $Z = -\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\phi =$ مقلوب معامل الجذر

$\tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\phi = \frac{5\pi}{6}}$

* هاي الخطوة مهمة * راح تفيدك بأسئلة Volume عشان أطلع حدود ϕ.

2) $3Z^2 = x^2 + y^2$

الحل:

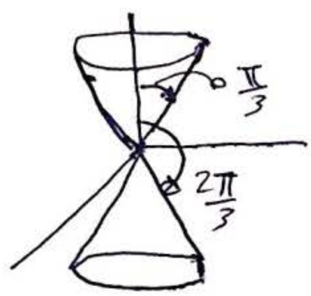
$Z^2 = \frac{x^2+y^2}{3}$ ⟶ r^2 ⟶ تمثل الجزء العلوي والسفلي لـ cone

$\cancel{\rho^2}\cos\phi^2 = \frac{\cancel{\rho^2}\sin\phi^2}{3}$

$\frac{\sin\phi^2}{\cos\phi^2} = 3$

$\tan\phi^2 = 3 \longrightarrow \tan\phi = \pm\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{3}}$ upper cone

$\boxed{\phi = \frac{2\pi}{3}}$ Lower cone



* الأشي الجديد إلي راح نتعلمو كيف نحل أسئلة Volume على Triple Inregral.

خطوات الحل: ١) إيجاد فرق الارتفاع ΔZ (بكونو حدود التكامل).

٢) رسم الاقتران.

٣) إيجاد حدود التكامل.

Note: في أسئلة Triple Inregral Volume و Double Int لا يختلف الحل بس راح يكون عنا نظام جديد نحل عليه وهو spherical أما ل cartasian و cylindrecal لا يختلف الحل.

* كيفية تحديد النظام الذي يحل عليه السؤال:

١) spherical ← أول ما تشوف: $\rho = x^2+y^2+Z^2$ بالسؤال. ← رقم

٢) cylindrecal ← أول ما تشوف: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ بالسؤال ← رقم.

٣) Cartisen ← جميع الأسئلة تحل على هذا النظام وكان الأغلب يكون الحل صعب فيكون الحل على الأنظمة الثانية أسهل.

Ex: Find the volume of the solid bounded by cone $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ & bd above by sphere $x^2+y^2+z^2=4$ (using triple integrals).

الحل

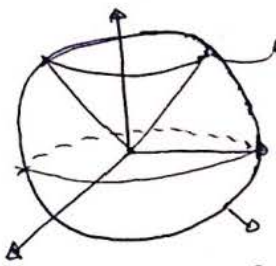
طريقة الحل: هلأ بالسؤال عندي

$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ $\boxed{g}$ $x^2+y^2+z^2=4$

فالسؤال بنحل على spherical
OR cylindral
OR cartesian.

انت مطلوب منك تحل على واحد منهم
و طبعاً لازم تختار الأسهل منهم.

$\boxed{1}$ spherical : (ρ, θ, ϕ)



$\to z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ النصف العلوي لـ cone (جذر موجب).

$x^2+y^2+z^2=4$ جذورها

$\to$ sphere $\to \boxed{\rho = 2}$

$\to$ cone $\to z=\sqrt{3x^2+3y^2}$

$z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$\to \tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ معامل مقلوب الجذر

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{6}}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2} \underbrace{\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}_{dV}$$

حدود θ — حدود ϕ — حدود ρ

dV لازم تكون حافظها

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

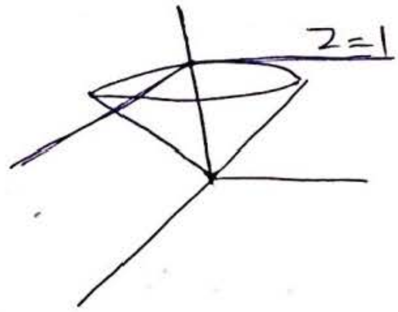
$$=\frac{8}{3} * \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$=\frac{8}{3} * \int_0^{2\pi} -\cos\phi \, . \, d\theta$$

$$=\frac{8}{3} * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\int_0^{2\pi} 1 . d\theta = \frac{8}{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}} * (\cancel{2}\pi)\right)$$

Ex: $\iiint_D (x+z)\,dV$ D: bd below by cone $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ & bd above by plane $z=1$

$\boxed{1}$ spherical: (ρ, ϕ, θ)



$\rightarrow z=1$

$\rho\cos\phi = 1$

$\rho = \frac{1}{\cos\phi} \rightarrow \boxed{\rho = \sec\phi}$

$\rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$\tan\phi = \sqrt{3} \rightsquigarrow$ مقلوب معامل الجذر

$\boxed{\phi = \frac{\pi}{3}}$

كمل الحل

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sec\phi} (\underbrace{\rho\sin\phi\cos\theta}_{x} + \underbrace{\rho\cos\phi}_{z}) \cdot \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

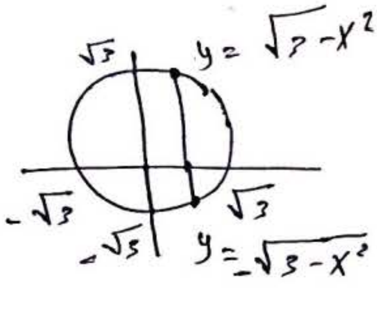
معاملها مع السؤال ولازم تكون فاهمه.

$\boxed{2}$ cylindrical: (z, r, θ)

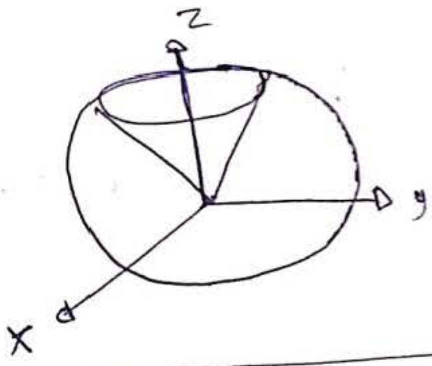
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{1} (r\cos\theta + z)\, r \cdot dz\, dr\, d\theta .$$

$\boxed{3}$ carlesion:-

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{1} (x+z)\; dz\, dy\, dx$$



$\boxed{2}$ cylindrecal :- (Z, r, θ)



cone: $Z = \sqrt{3}\ \sqrt{x^2+y^2}$

$Z = \sqrt{3}\ r \longrightarrow$ تحت

sphere: $\underbrace{x^2+y^2} + Z^2 = 4$

$r^2 + Z^2 = 4$

$Z = \sqrt{4 - r^2} \longrightarrow$ فوق

$$\boxed{\Delta Z = \sqrt{4-r^2} - \sqrt{3}\, r}$$

تكون حدود التكامل

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_{\sqrt{3} r}^{\sqrt{4-r^2}} r \; dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1} r \left(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{3}\, r\right) . dr\, d\theta$$

دائما صفر

يكمل الحل

عشان أطلع حدود $\underline{r}$

$Z = Z$

$Z = \sqrt{3}\, r = \sqrt{3}\ \sqrt{x^2+y^2}$

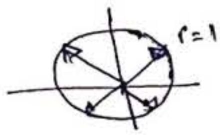
$Z = \sqrt{4 - r^2}$

$Z = Z$

$\sqrt{3}\, r = \sqrt{4-r^2}$

$3r^2 = 4 - r^2$

$4r^2 = 4$



$\boxed{r = 1}$ circle

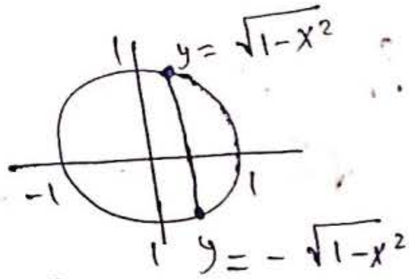
$\boxed{3}$ cartesion :-

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (1)\; dz\, dy\, . dx$$

حدود x

حدود y

حدود Z



Ex:- $\iiint\limits_{D} Z \cdot dV$. D: bd by the cylinder $y^2+Z^2=9$

& the planes $X=0$, $y=3X$ & $Z=0$

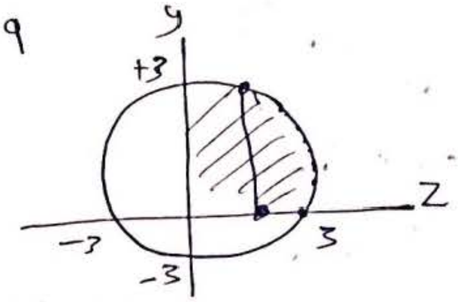
In the first octant $y\geq 0$, $X\geq 0$, $Z\geq 0$.

صح

حل (1)

$X=0$, $X=\frac{y}{3}$

$y^2+Z^2=9$



$\Delta X = \frac{y}{3} - 0$ → الأرتفاع

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{3-y^2}} \int_0^{\frac{y}{3}} Z \; dx\, dz\, dy$$

Ex:- Find the volume solid bd by Paraboloid

$X = y^2+Z^2$ & $X=16$ Using : [1] Double Integral.

[2] Triple Integral.

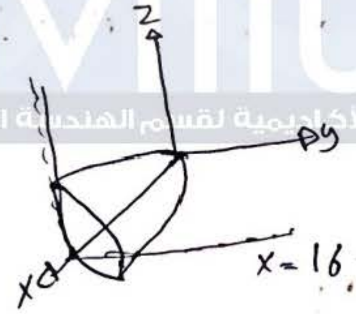
الحل

[1] Double Integral :-

cartesian :

$\iint$ (الأرتفاع) . dA

$$\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{+\sqrt{16-y^2}} 16-y^2-Z^2 \; . \; dz\,dy$$



* هلأ في هذا السؤال طالبمني أحل بـ Triple و Double .
* طبعاً ما بفرق أصح شو ما اختار أي نظام راح نحل عليه.
* في السؤال عندي $X = y^2+Z^2$ فأكيد بنحل على Polar لـ Double ، cylindrical " " لـ Triple ،

$\Delta X = 16-(y^2+Z^2)$

الأرتفاع

OR

so $\boxed{X = y^2+Z^2 \to X = r}$

$X=X$

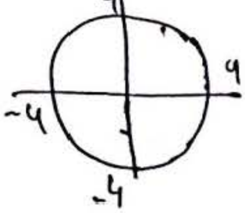
$\Delta X = -y^2 - Z^2 + 16$

$y^2+Z^2=16$ → circle

Polar :

$\Delta X = 16 - r^2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4} (16-r^2)\; r\, dr\, d\theta$$



هاد الحل الأسهل

2 Triple Integrals:-

① cartison:-

$$V = \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}}\int_{y^2+z^2}^{16} dx\; dy\; dz$$

لأن المحور x
وليس z

→ الحل نفس Double Integral

بس راح يكون الارتفاع حدود للتكامل

OR

cylindrecal:- ②

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4}\int_{r^2}^{16} dx \cdot r\, dr\, d\theta$$

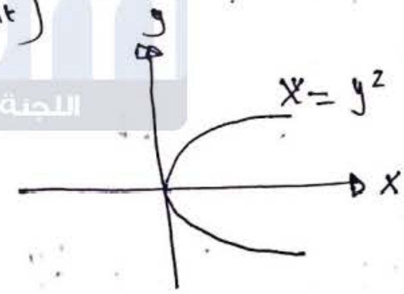
→ نفس Polar تقريباً

* انت بتختار واحد من الحلين.

Ex:- Find volume enclosed by the cylinder $x = y^2$ of the planes $Z = 0$ & $x + z = 1$ (Using Triple.Int)

$\Delta Z = (x-1) - (0) -$

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x-1} dz\; dx\; dy$$



$Z = Z$

$0 = x - 1$

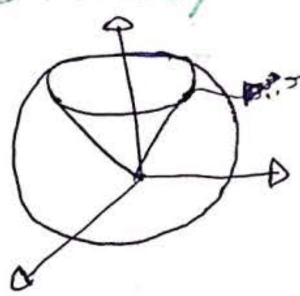
$0 = y^2 - 1$

$\boxed{y = \pm 1}$

$= \dfrac{8}{15}$ الجواب

Ex: Find the volume above the cone $Z=\sqrt{x^2+y^2}$, Below the sphere $x^2+y^2+Z^2=Z$. (Don't evaluate)

مهم جداً



→ spherical → هوه الحل الأسهل.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

→ cone : $Z=\sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\phi = 1$

$\boxed{\phi=\frac{\pi}{4}}$

* طبعاً هيك بكون خلص الحل لأنو طالب بالسؤال من دون تعويض.

→ sphere : $x^2+y^2+Z^2=Z$

$\rho^2 = Z$

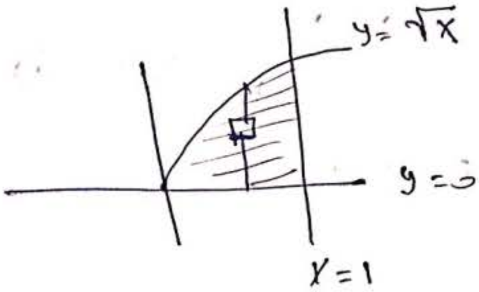
$\rho^{\cancel{2}} = \cancel{\rho}\cos\phi$

$\boxed{\rho=\cos\phi}$

Ex: $\iiint_E 6xy \cdot dV$ E: lies under plane $z = 1+x+y$ & above the region in xy-plane bounded by the curve $y = \sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$.

الحل:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{(1+x+y)} 6xy \; dz \; dy \, dx$$



$$\to \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy(1+x+y) \; dy \, dx$$

$$\to \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy + 6yx^2 + 6xy^2 \cdot dy \, dx$$

$$\int_0^1 \frac{6xy^2}{2} + \frac{6x^2y^2}{2} + 6x\frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

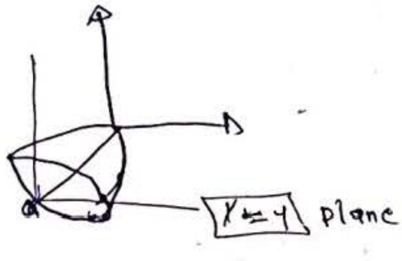
$$\to \int_0^1 3x^2 + 3x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} \; dx$$

$$x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \left(\frac{4}{7}\right)x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{7} = \frac{28+21+16}{28}$$

$$= \frac{65}{28}$$

#

Ex: $\iiint_E x \, dV$ E: is bd by the paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ & the plane $x = 4$



الحل

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{4r^2}^{4} x \, dx \, r \, dr \, d\theta$$

→ Paraboloid

$x = 4(y^2 + z^2)$

$\boxed{x = 4r^2}$

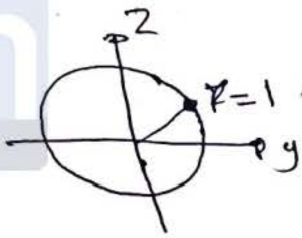
$\boxed{x = 4}$

$\boxed{\Delta x = 4 - 4r^2}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r \left. \frac{x^2}{2} \right|_{4r^2}^{4} dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r(8 - 8r^4) \, dr \, d\theta$$

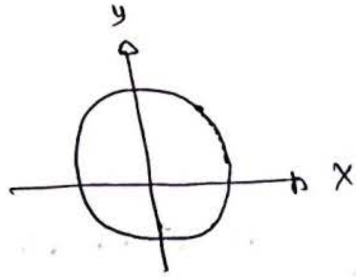
$$\int_0^{2\pi} \left. \frac{8r^2}{2} - \frac{8r^6}{6} \right|_0^1 d\theta$$



$$= \left. \frac{16}{6} \right|_0^{2\pi} = \frac{16}{36}(2\pi) = \frac{16}{18}(\pi)$$

Ex: $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ E: inside the cylinder $x^2+y^2=16$ & between planes $z=-5$, $z=4$.

الحل



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{-5}^{4} r^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$x^2+y^2=16$

$r^2=16$

$\boxed{r=4}$

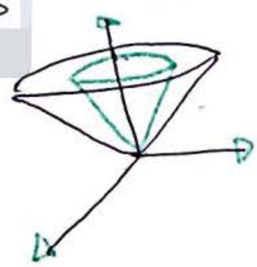
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4}(4+5)\,r^2\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} 3r^3\Big|_0^4\,d\theta = 3(4)^3(2\pi)$$

$$= 384\pi$$

Ex: Find the volume of the part of the ball $\rho \le a$ that ~~lie~~ between the cone $\phi=\frac{\pi}{6}$ & $\phi=\frac{\pi}{3}$.

مهم



$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_0^{a} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a \int_{\pi/6}^{\pi/3} = 2\pi\frac{a^3}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)}{3}\cdot\pi\cdot a^3$$

#

سؤال سنوات
$\boxed{2012}$

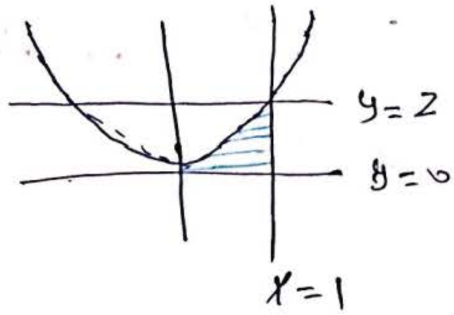
Q:- Reverse the order of integration $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx\,dy$.

* طبعاً نفس الأسئلة إلي حليناها بأول chapter.

Solution:-

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=1}^{x=\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$\Longrightarrow$ ارسم حدود التكامل



عمودي $\longrightarrow$ أفقي

$\Downarrow$

أمشي عكسه

عمودي $\longleftarrow$ أفقي

$x = \sqrt{y-1}$

$x^2 = y-1$

$\boxed{y = x^2+1}$ parabolla

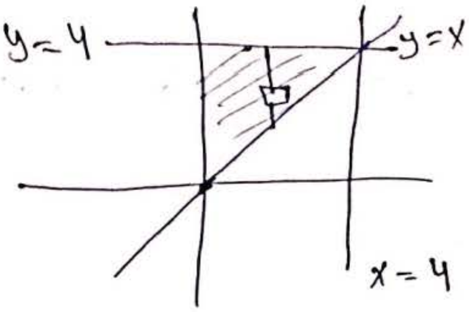
$\boxed{x = 1}$ Line

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{0=y}^{2=y} f(x,y)\,dy\,dx \quad \#$$

Q) سؤال حلو سنوات 2012 : convert to polar (Don't evaluate)

$$\int_0^4 \int_x^4 e^{x^2+y^2}\, dy\, dx .$$

ارسم حدود التكامل



حلو Cartsion → polar.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r\cos\theta}^{\frac{4}{\sin\theta}} e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$y = 4$

$r\sin\theta = 4$

$$\boxed{r = \frac{4}{\sin\theta}}$$

$r = x$

$$\boxed{x = r\cos\theta}$$

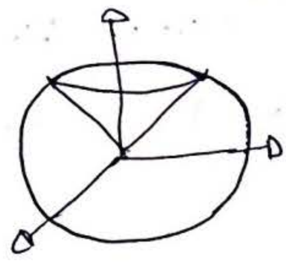
Q) سؤال سنوات :- Using spherical coordinates; set up (don't evaluate). $\iiint (x+z)\, dV$, where D is the solid region outside the cone $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$, inside the sphere $x^2+y^2+z^2=4$ & above the xy-plane.

الحل:

$$\iiint (x+z) \cdot dv$$

$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\phi = \frac{\pi}{6}$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{4} (\rho\sin\phi\cos\theta + \rho\cos\phi) \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

تم بحمد الله